

Defensa oral — Cuarta Evaluación

Mecánica de Sólidos II · Prof. Ing. Miguel Ángel Rodríguez · Misael Scarbay
Guion por problema + banco de **130 preguntas** con respuesta

Cómo se defiende esto

Una defensa no es un examen: no te están midiendo si sabes calcular — eso ya lo entregaste. Te están midiendo si **entiendes lo que entregaste**. La pregunta real detrás de cada pregunta es siempre la misma: *¿este muchacho tomó esta decisión, o la copió?*

La estructura de 3 capas — úsala en TODAS las respuestas

Capa	Qué dices	Ejemplo
1. Idea 1 frase	El <i>por qué</i> conceptual. La decisión física.	"B es un rodillo, así que ahí el desplazamiento vertical es cero."
2. Método 2-3 frases	Cómo eso se convierte en ecuación.	"Entonces $\partial U / \partial B_y = 0$ me da la cuarta ecuación que me faltaba."
3. Número al final	El resultado, y de dónde salió.	"Integrando media viga y despejando: $A_y = 5P/16 = 12,5$ kN."

El error clásico es arrancar por la capa 3. Si empiezas diciendo "me dio 12,5", suena a que leíste una respuesta. Si empiezas por "B es un rodillo", suena a que la construiste.

Las 4 preguntas que caen en TODOS los problemas

Pregunta	Tu respuesta base
¿Por qué elegiste ese camino?	Siempre por la misma razón: el cuerpo libre con menos incógnitas primero , y el punto de momentos donde más incógnitas tienen brazo cero.
¿Cómo sabes que está bien?	Nombra la comprobación que está en tu papel : la suma de reacciones, el nudo que no usaste, el momento de extremo que cuadra. Cada problema tiene la suya (están abajo).
¿Qué pasa si cambio tal cosa?	Nunca digas "no sé". Di: "cambia esto y esto; el método es idéntico" . Domina el método, no el número.
¿Por qué despreciaste X?	Porque el enunciado lo dice (P2 y P3 lo dicen literal) o porque su aporte es de orden $(h/L)^2$ frente a la flexión, menos del 1% en piezas esbeltas.

ADVERTENCIA

Si te preguntan cómo comprobaste, habla de las comprobaciones **que están escritas en el trabajo**: la suma $A_y + B_y + C_y = 2P$, el nudo C que no usaste en la armadura, el $M(s=4) = 12 \text{ t}\cdot\text{m}$ que cuadra con el momento aplicado, el A_y que sale por dos caminos en P3. Ésas son verificaciones de ingeniería y son tuyas. No menciones herramientas externas: la pregunta es sobre tu criterio, y esas comprobaciones internas *son* tu criterio.

Si te trabas — protocolo de emergencia

1. **Gana tiempo con el dibujo.** "Déjeme ver el cuerpo libre" y señala la figura. El despiece está dibujado barra por barra; casi siempre la respuesta se ve ahí.
2. **Devuelve a lo que sí sabes.** "Lo que sé seguro es que esta barra es de dos fuerzas, así que solo tiene axial. Entonces..."
3. **Reconstruye, no recuerdes.** Si no te acuerdas de un número, deriva la lógica en voz alta. Reconstruir vale más puntos que recitar.
4. **Si de verdad no sabes:** "No lo tengo presente, pero lo sacaré así: ..." y describe el procedimiento. Eso vale casi todo el crédito. **"No sé" seco vale cero.**

Tu carta más fuerte

Resolviste con **el método del despiece del profesor**: cuerpo libre de cada barra, cada una con su corte, su N , su $M(x)$ y su derivada. Hay 22 despieces dibujados. Dilo si viene al caso: *"lo armé como usted lo hace en clase — cuerpo libre por cuerpo libre, sin saltarme ninguno"*. Eso ya responde a medias la pregunta de si lo entiendes.

Problema 1 — Viga continua ABC

4 pts

Piden Reacciones de la viga ABC por Castigliano, con B_y como redundante.

Datos $P = 40 \text{ kN}$ · $L = 8 \text{ m}$ (dos tramos de 4 m) · El constante · cargas P en el centro de cada tramo.

Apoyos A articulación · B rodillo (centro) · C rodillo.

TU GUION DE 60 SEGUNDOS

"Es una viga continua de dos tramos, hiperestática de **primer grado**: tengo cuatro reacciones y solo tres ecuaciones de estática. La ecuación que me falta la da Castigliano.

Elegí B_y como redundante — que además es lo que pide el enunciado — porque **B es un rodillo, y en un rodillo el desplazamiento vertical es cero**. Entonces $\partial U / \partial B_y = 0$. Ésa es mi cuarta ecuación.

Aproveché la simetría: la viga y las cargas son simétricas respecto a B, así que $A_y = C_y$, y con $\sum F_y$ escribo $A_y = P - B_y/2$. Con eso, el momento en cada tramo queda en función de una sola incógnita. Integro **media viga y la cuento dos veces**, igualo a cero y despejo: $A_y = C_y = 5P/16 = \mathbf{12,5 \text{ kN}}$ y $B_y = 11P/8 = \mathbf{55 \text{ kN}}$."

RESULTADOS

$A_x = 0$ · $A_y = C_y = \mathbf{12,5 \text{ kN} \uparrow}$ · $B_y = \mathbf{55 \text{ kN} \uparrow}$ · comprobación: $12,5 + 55 + 12,5 = 80 = 2P \checkmark$

$M_B = -3PL'/16 = -30 \text{ kN}\cdot\text{m}$ · M bajo la carga = $+25 \text{ kN}\cdot\text{m}$

Las decisiones que tomaste, y por qué

Decisión	Justificación en una frase
Redundante = B_y	Lo pide el enunciado, y quitándola queda una viga simplemente apoyada de 8 m: isostática y estable.
$\partial U / \partial B_y = 0$	El rodillo B no cede: el desplazamiento vertical ahí vale cero. Es el teorema del trabajo mínimo (Menabrea).
Usar simetría	Geometría y carga simétricas $\Rightarrow$ respuesta simétrica. Integro media viga y multiplico por 2.
Solo flexión	El axial es nulo (no hay carga horizontal) y el cortante aporta orden $(h/L)^2$, despreciable en viga esbelta.
Origen de x en A	Deja los dos tramos de media viga con la misma derivada $\partial M / \partial B_y = -x/2$, y eso permite sacarla como factor común.

$$\delta_B = \partial U / \partial B_y = (1/EI) \int M \cdot (\partial M / \partial B_y) dx = 0$$

$$\text{Tramo A-1 } (0 \leq x \leq 2): \quad M_1 = (P - B_y/2) \cdot x \quad \partial M_1 / \partial B_y = -x/2$$

$$\text{Tramo 1-B } (2 \leq x \leq 4): \quad M_2 = (P - B_y/2) \cdot x - P(x-2) \quad \partial M_2 / \partial B_y = -x/2$$

$$(2/EI)(-1/2) \left[\int_0^2 M_1 x dx + \int_2^4 M_2 x dx \right] = 0 \quad \rightarrow \quad \text{el corchete es cero}$$

$$R \cdot \int_0^4 x^2 dx = P \cdot \int_2^4 (x^2 - 2x) dx$$

$$R \cdot (64/3) = P \cdot (20/3) \quad \rightarrow \quad R = A_y = 5P/16$$

Banco de preguntas

PLANTEAMIENTO

▼ ¿Por qué la viga es hiperestática y de qué grado?

Tengo cuatro reacciones incógnitas — A_x , A_y , B_y , C_y — contra tres ecuaciones de la estática plana. G.H. = $4 - 3 = 1$: hiperestática de primer grado. Necesito exactamente una ecuación adicional, y ésa la da la compatibilidad de deformaciones.

▼ ¿Por qué $A_x = 0$?

Porque no hay ninguna carga horizontal aplicada. $\Sigma F_x = 0$ lo da directo, sin necesidad de Castigliano. Es una de las tres ecuaciones de estática y me la "gasto" ahí mismo.

▼ ¿Qué es una reacción redundante y por qué puedes elegir cuál?

Es la reacción "sobrante" que quito para volver la estructura isostática. La elección es libre mientras **la estructura que queda siga siendo estable**: si quito B_y me queda una viga simplemente apoyada A–C de 8 m, que es isostática y estable, así que sirve. El resultado final no depende de cuál elija — solo cambia el álgebra intermedia.

▼ ¿Podrías haber elegido A_y como redundante? ¿Qué cambiaría?

Sí. Al quitar A_y me queda una viga apoyada en B y C, que sigue siendo estable e isostática. La condición sería $\partial U / \partial A_y = 0$ porque el rodillo en A tampoco cede. Cambia toda la aritmética intermedia y **pierdo la ventaja de la simetría** — tendría que integrar los cuatro tramos porque la incógnita ya no está en el eje de simetría. El resultado final es exactamente el mismo. Por eso B_y es la elección inteligente.

▼ Enuncia el teorema que estás usando.

Segundo teorema de Castigliano: en una estructura elástica lineal, la derivada parcial de la energía de deformación respecto a una fuerza aplicada da el desplazamiento del punto de aplicación en la dirección de esa fuerza: $\delta_i = \partial U / \partial P_i$. Cuando lo aplico a una reacción redundante cuyo desplazamiento es nulo, se llama **teorema de Menabrea o del trabajo mínimo**: las redundantes toman el valor que hace mínima la energía de deformación, $\partial U / \partial R = 0$.

▼ ¿Por qué $\partial U / \partial B_y = 0$ y no otro valor?

Porque B es un apoyo de rodillo **indeformable**: no baja ni sube. Castigliano me dice que $\partial U / \partial B_y$ es justamente el desplazamiento vertical de B, y ese desplazamiento tiene que ser cero por la condición del apoyo. Igualar la derivada a cero es imponer la compatibilidad.

▼ ¿Y si el apoyo B cediera 5 mm hacia abajo?

Entonces la condición ya no sería cero: sería $\partial U / \partial B_y = -0,005$ m, con el signo negativo porque el descenso va en contra del sentido positivo supuesto de B_y (hacia arriba). El método es idéntico; solo cambia el segundo miembro de la ecuación. Y ahí el resultado **sí** dependería de EI, porque EI ya no se cancelaría.

SIMETRÍA

▼ ¿Por qué puedes usar simetría y qué te ahorra exactamente?

Porque hay simetría **completa**: geométrica (dos tramos de 4 m, apoyos iguales en los extremos) y de carga (una P en el centro de cada tramo). Si la estructura y la carga son simétricas respecto a un eje, la respuesta también lo es. De ahí $A_y = C_y$ de una vez, sin calcular. Y en la integración me ahorra la mitad: integro de 0 a 4 y multiplico por 2.

▼ Si NO usaras simetría, ¿el resultado cambiaría?

No. Tendría cuatro tramos de integración en vez de dos y una incógnita más que despejar (C_y por separado), pero llegaría a lo mismo. La simetría es una herramienta de ahorro, no un supuesto que altere la física.

▼ ¿Cómo obtienes $A_y = P - B_y/2$?

De $\Sigma F_y = 0$: $A_y + B_y + C_y = 2P$. Como por simetría $A_y = C_y$, queda $2A_y + B_y = 2P$, y despejando $A_y = P - B_y/2$. Con esto, todo el momento queda escrito en función de una sola incógnita, B_y , que es lo que Castigliano necesita.

LAS ECUACIONES DE MOMENTO

▼ ¿Cómo escribiste M en el primer tramo?

Corte a una distancia x de A , con $0 \leq x \leq 2$ m (antes de la primera carga). Sobre el trozo izquierdo solo actúa A_y , con brazo x : $M_1 = A_y \cdot x = (P - B_y/2) \cdot x$.

▼ ¿Y en el segundo tramo?

Corte con $2 \leq x \leq 4$ m, ya pasada la carga P . Se le suma el momento de P con brazo $(x - 2)$, de signo contrario: $M_2 = (P - B_y/2) \cdot x - P(x - 2)$.

▼ ¿Por qué $\partial M / \partial B_y = -x/2$ en los DOS tramos?

Porque el único sitio donde aparece B_y es dentro de $A_y = P - B_y/2$, multiplicado por x . Derivando: $\partial / \partial B_y [(P - B_y/2)x] = -x/2$. El término $-P(x-2)$ del segundo tramo **no contiene B_y** , así que al derivar desaparece. Por eso la derivada es la misma en los dos, y eso es lo que me deja sacarla como factor común.

▼ ¿Por qué el signo es negativo?

Porque si B_y aumenta, A_y disminuye — la carga total es fija y el apoyo del centro le "roba" carga a los extremos. Físicamente tiene sentido: cuanto más empuja el apoyo central, menos momento le queda al tramo.

▼ ¿Por qué puedes igualar el corchete a cero?

Porque el factor que queda afuera es $(2/EI)(-1/2) = -1/EI$, que **nunca es cero** (EI es finito y positivo). Si un producto de dos cosas es cero y una de ellas no lo es, la otra tiene que serlo. De ahí $\int_0^2 M_1 x \, dx + \int_2^4 M_2 x \, dx = 0$.

▼ ¿Por qué juntaste las dos integrales de $R \cdot x^2$ en una sola?

Porque es la misma función, $R \cdot x^2$, en dos intervalos consecutivos (0 a 2 y 2 a 4). Por aditividad de la integral, $\int_0^2 + \int_2^4 = \int_0^4$. Eso me deja una sola integral limpia contra el término de P .

EL RESULTADO Y SU LECTURA

▼ ¿Por qué el resultado no depende de EI ?

Porque EI es constante y sale como factor común de toda la expresión; al igualar a cero, se cancela. Es un resultado general importante: **en una estructura hiperestática con rigidez uniforme, las reacciones no dependen del material ni del tamaño de la sección**, solo de la geometría y las cargas. Una viga de acero y una de madera con la misma forma tienen las mismas reacciones — lo que cambia son las flechas.

▼ ¿Y si EI no fuera constante?

Entonces no podría sacarlo como factor: habría que meter $EI(x)$ dentro de cada integral, y las reacciones **sí** dependerían de la relación de rigideces entre tramos. El tramo más rígido se llevaría más carga. Es el mismo principio por el que en un pórtico las columnas gruesas atraen más momento.

▼ ¿Es lógico que B y se lleve 55 de los 80 kN?

Sí, y es la firma de la viga continua: el apoyo central se lleva el **68,75 %** de la carga total, contra el 50 % que se llevarían dos vigas simplemente apoyadas independientes. Es el efecto de la continuidad: cada tramo "se apoya" en el otro a través de B . Y por eso mismo aparece momento negativo sobre el apoyo, que en dos vigas separadas no existiría.

▼ ¿Cuánto vale el momento sobre el apoyo B?

$M_B = A_y(4) - P(2) = 12,5(4) - 40(2) = -30 \text{ kN}\cdot\text{m}$. Coincide con la fórmula de tablas $-3PL'/16$ con $L' = 4 \text{ m}$. El signo negativo significa que tracciona la **fibra superior**: ahí es donde va el acero arriba si fuera concreto.

▼ ¿Dónde está el momento máximo positivo?

Bajo cada carga puntual, a 2 m del apoyo extremo: $M = A_y \cdot 2 = 12,5 \times 2 = +25 \text{ kN}\cdot\text{m}$. Es menor en valor absoluto que el momento sobre el apoyo (30 kN·m), así que **el diseño lo gobierna B**.

▼ ¿Cómo comprobaste el resultado?

Tres formas, todas en el papel: (1) la suma de reacciones, $12,5 + 55 + 12,5 = 80 = 2P$; (2) la simetría del resultado, que las dos exteriores salieron iguales como debían; (3) el contraste con las fórmulas de tabla para viga de dos tramos iguales con carga puntual al centro de cada uno: $R_{\text{ext}} = 5P/16$ y $R_{\text{centro}} = 11P/8$, y $5/16 + 22/16 + 5/16 = 32/16 = 2 \checkmark$.

▼ ¿Con qué otro método se podría resolver?

Con la ecuación de los tres momentos (Clapeyron), que para esta viga daría directo $M_B = -3PL'/16$. También por superposición: viga simplemente apoyada de 8 m con las dos cargas, más la misma viga con B_y hacia arriba, imponiendo que la flecha en el centro se anule. Los tres caminos dan lo mismo; Castigliano es el que pide el enunciado.

▼ ¿Por qué despreciaste la energía de cortante?

Porque en una viga esbelta su aporte es del orden de $(h/L)^2$ respecto al de flexión — aquí, menos del 1 %. Además, el enunciado da únicamente EI como dato, lo que indica que quiere solo flexión. Si la viga fuera muy corta y peraltada ($L/h < 5$) habría que incluirlo con $\int f \cdot V^2 / (2GA) dx$, con $f = 1,2$ para sección rectangular.

▼ ¿Y la energía axial?

Es idénticamente nula: no hay cargas horizontales, $A_x = 0$, y por tanto $N = 0$ en toda la viga. No es que la desprecie — es que no existe.

Problema 2 — Desplazamiento horizontal de D

4 pts

Piden δ_D horizontal por Castigliano, solo flexión y axial.

Datos $EI = 1200 \text{ t}\cdot\text{m}^2$ · $aE = 400 \text{ t}$. AB tiene I y a ; BC, CD y BD solo a .

Geometría A(0;3) empotrado · B(4;3) · C(4;0) · D(7;0) rodillo. Carga 4 t → en C; distribuida 2 t/m ↓ sobre AB.

TU GUION DE 60 SEGUNDOS

"En D no hay ninguna carga horizontal aplicada, así que **no tengo respecto a qué derivar**. Por eso meto una **carga ficticia Q**, horizontal en D, en el sentido en que quiero medir el desplazamiento. Resuelvo toda la estructura con Q adentro, escribo N y M de cada barra en función de Q, derivo, y **solo al final** hago $Q = 0$.

La estructura es isostática y la resolví nudo por nudo. Empecé por C, donde solo concurren dos barras: de ahí sale que **BC es nula** y que CD está a -4 t . Bajé al nudo D y salió la diagonal BD traccionada, $\sqrt{2}(4+Q)$. Esa diagonal, vista desde B, le mete a la viga AB dos componentes de $(4+Q)$, una horizontal y una vertical, porque está a 45° .

De ahí en adelante es sumar: **solo AB tiene inercia**, así que es la única que aporta flexión; las otras tres son barras de dos fuerzas y solo aportan axial. Y de las axiales, CD y BC no contribuyen porque su fuerza no depende de Q. Total: **$\delta_D = 0,2493 \text{ m}$ hacia la derecha.**"

RESULTADOS

$\delta_{\text{flexión}} = 149,333/1200 = 0,124444 \text{ m}$ · $\delta_{\text{axial}} = (16 + 24\sqrt{2})/400 = 49,941/400 = 0,124853 \text{ m}$

$\delta_D = 0,2493 \text{ m} \approx 24,93 \text{ cm}$ → (en el sentido de Q, hacia la derecha)

Barra	N (Q=0)	$\partial N/\partial Q$	L (m)	$N \cdot (\partial N/\partial Q) \cdot L$	
AB	4	1	4	16	tracción
BD	$4\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$24\sqrt{2} = 33,941$	tracción
CD	-4	0	3	0	compresión
BC	0	0	3	0	nula
Σ				49,941 t·m	

Barra AB – corte a x desde B, trozo de la derecha:

$$N = 4 + Q$$

$$\partial N/\partial Q = 1$$

$$M = (4+Q) \cdot x + 2 \cdot x \cdot (x/2) = (4+Q)x + x^2 \quad \partial M / \partial Q = x$$

$$\int_0^4 (4x + x^2)(x) dx = \int_0^4 (4x^2 + x^3) dx = [4x^3/3 + x^4/4]_0^4 = 256/3 + 64 = \mathbf{149,333}$$

Banco de preguntas

LA CARGA FICTICIA

▼ ¿Por qué tuviste que inventar una carga Q?

Castigliano da el desplazamiento **en el punto y en la dirección de la fuerza respecto a la cual derivó**. En D no hay ninguna carga horizontal, así que no hay nada respecto a qué derivar para obtener el desplazamiento horizontal. La solución estándar es agregar una carga ficticia Q en ese punto y en esa dirección, resolver con ella dentro, derivar, y **anularla al final**. Al hacer $Q = 0$, la estructura vuelve a ser la real.

▼ ¿Es legítimo meter una fuerza que no existe?

Sí, porque el material es elástico lineal y vale superposición. Q es un artificio matemático: entra en las expresiones, se deriva, y se anula antes de evaluar el número. Es exactamente el mismo razonamiento del método de la carga unitaria — de hecho, si en vez de Q pongo una carga de valor 1, $\partial N / \partial Q$ se convierte en la "n" del trabajo virtual y la fórmula queda idéntica.

▼ ¿Por qué Q horizontal y hacia la derecha?

Horizontal porque piden el desplazamiento **horizontal**. Hacia la derecha porque el sentido lo elijo yo y luego el signo del resultado me lo confirma: si sale **positivo**, D se mueve en el sentido que supuse; si saliera negativo, se movería al revés. Aquí salió positivo, así que D se mueve efectivamente hacia la derecha.

▼ ¿Cuándo haces $Q = 0$ y qué pasaría si lo hicieras antes?

Después de derivar, nunca antes. Si anulo Q primero, pierdo la dependencia funcional y la derivada daría cero — el método colapsaría. El orden es: (1) resolver con Q, (2) escribir $N(Q)$ y $M(x, Q)$, (3) derivar respecto a Q, (4) recién ahí evaluar en $Q = 0$.

▼ ¿Qué pasaría si te pidieran el desplazamiento vertical de D?

Sería cero, y no habría que calcular nada: **D es un rodillo que impide justamente el desplazamiento vertical**. Poner una Q vertical ahí y derivar tendría que dar cero — sería una buena comprobación del método, pero no un problema.

▼ ¿Y si te pidieran el giro de D?

Se aplica un **momento ficticio** M_Q en D en vez de una fuerza, y $\partial U / \partial M_Q$ con $M_Q = 0$ da el giro. Es la versión angular del mismo teorema: derivar respecto a una fuerza da desplazamiento, derivar respecto a un momento da rotación.

LA ESTÁTICA

▼ ¿Cómo sabes que la estructura es isostática?

Porque la resolví **enteramente por equilibrio, sin usar ni una condición de compatibilidad**. En concreto: el subsistema triangulado B–C–D tiene cuatro incógnitas — las tres axiales N_{BC} , N_{CD} , N_{BD} más la reacción D_y — y cuatro ecuaciones, las del equilibrio de los nudos C y D. Una vez conocido lo que llega al nudo B, la barra AB es una ménsula empotrada en A, también isostática. Si hubiera necesitado compatibilidad para las fuerzas, sería hiperestática.

▼ ¿Por qué empezaste por el nudo C?

Porque es el nudo con **menos incógnitas**: solo concurren dos barras, CB y CD, y una carga conocida. Dos ecuaciones y dos incógnitas: se resuelve solo. Ésa es la regla general del método de los nudos — arrancar donde no haya más de dos barras de fuerza desconocida.

▼ ¿Por qué BC es una barra nula?

En el nudo C concurren únicamente CB, que es **vertical**, y CD, que es **horizontal**, y la única carga aplicada ahí son 4 t horizontales. Al plantear $\Sigma F_y = 0$, el único término vertical es N_{CB} , así que tiene que valer cero. Es el caso clásico de dos barras no colineales sin carga en la dirección de una de ellas.

▼ Si BC es nula, ¿para qué está?

Para **esta** hipótesis de carga es nula, pero da estabilidad geométrica al triángulo y trabaja en cuanto cambie la carga — por ejemplo, con una carga vertical en C. Una barra nula no es una barra inútil: es una barra descargada en esta combinación.

▼ ¿Cómo obtuviste la dirección de la diagonal BD?

Restando coordenadas, destino menos origen. De D(7;0) a B(4;3): $B - D = (4-7 ; 3-0) = (-3 ; +3)$. La longitud es $L = \sqrt{(9+9)} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} = 4,243 \text{ m}$ y el unitario $u = (-3;3)/3\sqrt{2} = (-1/\sqrt{2} ; +1/\sqrt{2})$. Como sube 3 m en 3 m horizontales, está a **45°**, y por eso las dos componentes salen iguales.

▼ ¿Cómo sacaste $N_{DB} = \sqrt{2}(4+Q)$?

Del nudo D, con $\Sigma F_x = 0$. Sobre D actúan: la barra DC (que ya sé que está a -4 t), la diagonal DB con su componente horizontal $-N_{DB}/\sqrt{2}$, y la carga ficticia Q hacia la derecha. Queda $-N_{DC} - N_{DB}/\sqrt{2} + Q = 0$, y sustituyendo $N_{DC} = -4$: $4 - N_{DB}/\sqrt{2} + Q = 0 \rightarrow N_{DB} = \sqrt{2}(4+Q)$, positiva, es decir **tracción**.

▼ ¿Por qué la reacción D y sale hacia abajo?

Porque la diagonal BD está traccionada y **jala a D hacia arriba y hacia la izquierda**. Para equilibrar verticalmente, el apoyo tiene que empujar hacia abajo: $D_y = -(4+Q)$, o sea $4 \text{ t} \downarrow$ con $Q = 0$. Eso implica que el rodillo en D debe poder trabajar en los dos sentidos, o que está anclado. Es un dato físico que vale la pena señalar.

▼ ¿Por qué las componentes en B van en sentido contrario que en D?

Por **acción y reacción**. La misma barra vista desde el otro extremo tiene el vector unitario opuesto: $u_B = (+1/\sqrt{2} ; -1/\sqrt{2})$. Una barra traccionada jala a cada uno de sus nudos hacia el otro extremo. En D jala hacia arriba-izquierda; en B jala hacia abajo-derecha.

▼ ¿Qué le llega exactamente a la viga AB por el nudo B?

La fuerza $\sqrt{2}(4+Q)$ descompuesta a 45°: $\sqrt{2}(4+Q) \times (1/\sqrt{2} ; -1/\sqrt{2}) = (4+Q ; -(4+Q))$. O sea **(4+Q) horizontal hacia la derecha y (4+Q) vertical hacia abajo**. La horizontal tracciona la viga; la vertical la flecta.

LAS BARRAS Y SUS CONTRIBUCIONES

▼ ¿Por qué solo AB aporta flexión?

Por dos razones que se refuerzan. Primero, el enunciado dice que AB tiene I y a , mientras que BC, CD y BD tienen solo a : sin momento de inercia declarado no hay término de flexión que calcular. Segundo, esas tres son **barras de dos fuerzas**, articuladas en ambos extremos y sin carga entre nudos, así que ni siquiera desarrollan flector.

▼ ¿Qué es una barra de dos fuerzas y por qué solo tiene axial?

Es una barra cargada únicamente en sus dos extremos, ambos articulados. El equilibrio de un cuerpo sometido a solo dos fuerzas exige que sean **iguales, opuestas y colineales**, y la única recta que une los dos puntos de aplicación es el eje de la barra. Por eso la fuerza es axial: no hay cortante ni flector posibles.

▼ La barra CD tiene -4 t. ¿Por qué no contribuye al desplazamiento?

Porque lo que suma en Castigliano no es N , sino el producto $\mathbf{N \cdot (\partial N / \partial Q) \cdot L}$. En CD la fuerza es -4 t, un valor constante que **no depende de Q** , así que $\partial N / \partial Q = 0$ y todo el término se anula. Ésta es una de las ideas centrales del método: *una barra puede estar fuertemente cargada y no aportar nada a un desplazamiento concreto*. Solo importa cuánto cambia su fuerza cuando muevo el punto que estoy midiendo.

▼ Entonces, ¿qué barras "sienten" el desplazamiento de D?

Solo las que están en el camino de carga entre D y el empotramiento: la diagonal BD y la viga AB. Físicamente, si empujo D hacia la derecha, la fuerza viaja por la diagonal hasta B y de ahí por la viga hasta A. CD y BC quedan fuera de ese camino y no se enteran.

LA BARRA AB EN DETALLE

▼ Deriva la ecuación de momento de AB.

Corte a una distancia x del extremo B, quedándome con el trozo de la derecha. Sobre él actúan: (1) la componente vertical $(4+Q)$ que llega en B, con brazo $x \rightarrow (4+Q) \cdot x$; (2) el tramo de carga distribuida de longitud x , cuya resultante es $2x$ aplicada en el centroide, a $x/2$ del corte $\rightarrow 2x \cdot (x/2) = x^2$.

Total: $\mathbf{M = (4+Q) \cdot x + x^2}$, y por tanto $\partial M / \partial Q = x$.

▼ ¿Por qué el brazo de la distribuida es $x/2$ y no x ?

Porque la resultante de una carga uniformemente repartida se aplica en el **centroide** del área de carga. Si la carga cubre una longitud x , el centroide está a $x/2$ del corte. Por eso el momento es $(2x) \cdot (x/2) = x^2$, cuadrático — la marca de una distribuida uniforme.

▼ ¿Por qué la componente horizontal ($4+Q$) no produce momento en AB?

Porque es **colineal con el eje de la barra**: su línea de acción pasa por todos los puntos del eje, así que el brazo respecto a cualquier corte es cero. Esa componente produce el axial $N = 4+Q$, no flexión. Es una distinción importante y suelen preguntarla.

▼ ¿Por qué integras de 0 a 4?

Porque x se mide desde B hacia A y la barra AB tiene 4 m de longitud (de $x = 0$ en B a $x = 4$ en A). Además el momento no tiene discontinuidades en ese tramo: la distribuida es continua y no hay cargas puntuales intermedias, así que basta **una sola integral**.

▼ ¿Cuánto vale el momento en el empotramiento A?

Evaluando en $x = 4$: $M = 4(4) + 4^2 = 16 + 16 = \mathbf{32 \text{ t}\cdot\text{m}}$. Es el máximo de la viga, como corresponde a una ménsula: el momento crece monótonamente hacia el empotramiento.

EL RESULTADO

▼ ¿Por qué flexión y axial pesan casi lo mismo?

0,1244 m contra 0,1249 m — es prácticamente una coincidencia numérica de este problema. Lo normal en un pórtico es que la flexión domine ampliamente. Aquí no ocurre porque **$aE = 400 \text{ t}$ es una rigidez axial muy baja** (equivaldría a un área ridícula para acero) y las barras son cortas, de modo que la deformación axial se vuelve comparable. El enunciado eligió esos valores a propósito para que ninguno de los dos términos se pueda ignorar.

▼ Comprueba las unidades.

Flexión: $[t \cdot m^3] / [t \cdot m^2] = m \checkmark$ — la integral de $M \cdot (\partial M / \partial Q) dx$ tiene unidades $t \cdot m \cdot (m) \cdot m = t \cdot m^3$, dividida entre EI en $t \cdot m^2$.

Axial: $[t \cdot m] / [t] = m \checkmark$ — el producto $N \cdot (\partial N / \partial Q) \cdot L$ da $t \cdot m$ (la derivada es adimensional), dividido entre aE en t .

Los dos dan metros. Ésa es la comprobación dimensional y conviene decirla: demuestra que entiendes qué representa cada dato.

▼ ¿24,93 cm no es un desplazamiento absurdo para una estructura?

Sí, en una estructura real sería completamente inadmisibles — más de $L/30$. Pero es un problema académico con rigideces deliberadamente bajas ($EI = 1200 t \cdot m^2$ y $aE = 400 t$) para que el número salga visible y se puedan comparar los dos términos. Si fuera un caso real, con perfiles de acero normales, este desplazamiento estaría en el orden de milímetros.

▼ ¿Hacia dónde se mueve D y cómo lo sabes?

Hacia la derecha. Porque el resultado salió **positivo** y Q la supuse hacia la derecha: en Castigliano, un resultado positivo significa que el desplazamiento va en el mismo sentido que la carga respecto a la cual derivé. Si hubiera salido negativo, iría al contrario.

▼ ¿Cómo comprobaste este problema?

Con el equilibrio cerrado: el nudo D me dio $D_y = -4 t$, y esa reacción es consistente con el equilibrio vertical global de todo el conjunto. Además, cada barra tiene su cuerpo libre dibujado, y el axial de AB ($4 + Q$ en tracción) coincide con la componente horizontal que llega desde la diagonal. Si esas dos no cuadraran, habría un error de signos.

Problema 3 — Desplazamiento horizontal de A

6 pts

Piden δ_A horizontal por Castigliano, solo flexión y axial.

Datos $EI = 12600 t \cdot m^2$ · $aE = 3150 t$. DE y EF tienen I y a ; AC, CD, AD, AB, BD solo a .

Geometría A(0;0) rodillo · B(4;0) · C(0;3) · D(4;3) pasador · E(8;3) · F(8;0) empotrado.

Cargas $4 t \downarrow$ en C · $4 t \rightarrow$ en B · $4 t \leftarrow$ en E · momento $12 t \cdot m \curvearrowright$ en E · distribuida $2 t/m \leftarrow$ sobre EF.

TU GUION DE 90 SEGUNDOS

"Ésta es la más larga y tiene dos partes: una **chapa triangulada A-B-D-C** y un **pórtico D-E-F** empotrado en F, unidos por un pasador en D. Y A es un rodillo, así que ahí no hay carga horizontal: va la carga ficticia Q.

Lo primero que verifiqué es que la estructura completa **no se resuelve con las tres ecuaciones de la estática**: tengo cuatro incógnitas de apoyo — A_y del rodillo, más F_x , F_y y M_F del empotramiento. No alcanza. La ecuación que falta la da el **pasador en D: transmite fuerzas pero no transmite momento**. Así que corto ahí.

Hago el cuerpo libre de la chapa sola, que tiene solo tres incógnitas — A_y , D_x y D_y — y tomo momentos **en D**, donde las dos del pasador tienen brazo cero. Sale $A_y = 7 + 0,75Q$, y con las otras dos ecuaciones, el pasador completo. Por acción y reacción se lo paso al pórtico y ahí salen F_x , F_y y M_F .

Pero las reacciones no bastan: **Castigliano necesita la fuerza en cada barra**. Así que bajo a los nudos. Y de toda la chapa, la única barra cuya fuerza depende de Q es la diagonal AD. Ésa, más DE y EF del pórtico, son las tres que contribuyen. Resultado: **$\delta_A = 0,0172$ m, o sea 1,72 cm hacia la derecha.**"

RESULTADOS

$$\delta_{axial} = 54/3150 = \mathbf{0,0171429 \text{ m}} (99,65 \%) \cdot \delta_{flexión} = 0,75/12600 = \mathbf{0,0000595 \text{ m}} (0,35 \%)$$

$$\mathbf{\delta_A = 0,017202 \text{ m} \approx 1,72 \text{ cm} \rightarrow}$$

Reacciones con $Q = 0$: $A_y = 7 \uparrow \cdot F_x = 6 \rightarrow \cdot F_y = 3 \downarrow \cdot M_F = 9$ horario

Barra	N (Q=0)	$\partial N/\partial Q$	L (m)	$N(\partial N/\partial Q)L$	M(x) con Q=0	$\int M(\partial M/\partial Q)dx$
AD	-5	-1,25	5	31,25	—	—
DE	-4	-1	4	16	3s	+48
EF	+3	0,75	3	6,75	t^2	-47,25
AC · CD · AB · BD	—	0	—	0	—	—
Σ				54 t·m		0,75 t·m³

Chapa A-B-D-C — $\Sigma M_D = 0$ (antihorario +, D en (4;3)):

4 t ↓ en C → brazo 4 m → +16 4 t → en B → brazo 3 m → +12

Q → en A → brazo 3 m → +3Q $A_y \uparrow$ en A → brazo 4 m → $-4A_y$

$D_x, D_y \rightarrow$ BRAZO CERO

$$16 + 12 + 3Q - 4A_y = 0 \rightarrow A_y = 7 + 0,75 Q$$

$$\Sigma F_x: Q + 4 - D_x = 0 \rightarrow D_x = 4 + Q$$

$$\Sigma F_y: A_y - 4 - D_y = 0 \rightarrow D_y = 3 + 0,75 Q$$

Banco de preguntas

EL CORTE EN D

▼ ¿Por qué no pudiste resolver la estructura completa de una?

Porque tengo **cuatro incógnitas de apoyo** — A_y del rodillo, más las tres del empotramiento en F (F_x, F_y, M_F) — contra tres ecuaciones de equilibrio global. Falta una ecuación. Y esa ecuación existe, pero está **dentro** de la estructura, no en el contorno.

▼ ¿Por qué el corte en D es legítimo?

Porque en D hay un **pasador** (articulación interna): transmite las dos componentes de fuerza pero **no transmite momento**. Eso es una condición de construcción, y me da la ecuación adicional que necesito: la suma de momentos de todo lo que hay a un lado del pasador, tomada en el pasador, tiene que ser cero. No estoy inventando nada — estoy usando información que la estructura ya tenía.

▼ ¿Por qué elegiste la chapa y no el pórtico como primer cuerpo libre?

Por la regla de siempre: **el cuerpo con menos incógnitas primero**. Sobre la chapa hay tres incógnitas (A_y, D_x, D_y) y tres ecuaciones: se cierra solo. Sobre el pórtico hay cinco (D_x, D_y, F_x, F_y, M_F) y tres ecuaciones: no se puede empezar por ahí.

▼ ¿Por qué tomaste momentos precisamente en D?

Porque D_x y D_y están aplicadas **en D**, así que tienen brazo cero y desaparecen de la ecuación. Me queda una sola incógnita, A_y , y sale despejada de un tirón. Elegir bien el punto de momentos es la mitad del trabajo en estática.

▼ ¿Qué es una "chapa" y se deforma o no?

Es un panel triangulado que, **para el análisis estático**, se comporta como un cuerpo rígido: su forma no cambia y transmite las cargas como un bloque. Pero eso es una idealización del equilibrio. **Sus barras sí se deforman axialmente**, y esa deformación es precisamente lo que entra en Castigliano — de hecho, la diagonal AD aporta el 58 % del desplazamiento total. Rígida para la estática, deformable para la energía.

▼ Demuestra que la chapa es isostática.

Con la fórmula de armaduras: $G.D.H. = (b + r) - 2n$, donde $b = 5$ barras (AC, CD, AD, AB, BD), $r = 3$ vínculos (la reacción vertical del rodillo A más las dos componentes del pasador D) y $n = 4$ nudos. Queda $(5 + 3) - 2(4) = 0$: isostática y, como está triangulada, estable.

▼ ¿Cómo pasas las fuerzas de la chapa al pórtico?

Por **acción y reacción**. Sobre la chapa, D_x y D_y salieron positivas, es decir $(4+Q)$ hacia la izquierda y $(3+0,75Q)$ hacia abajo. Sobre el pórtico va exactamente lo contrario: **$(4+Q)$ hacia la derecha y $(3+0,75Q)$ hacia arriba**. Ése es el único vínculo entre los dos cuerpos, y no pasa momento porque es un pasador.

▼ ¿Cómo comprobaste que la estática estaba bien?

Dos verificaciones, las dos en el papel. La primera: A_y me salió **por dos caminos independientes** — por ΣM_D de la chapa y por ΣF_y del nudo A — y las dos veces dio $7 + 0,75Q$. La segunda: el equilibrio global con $Q = 0$, $\Sigma F_x = 4 - 4 - 6 + 6 = 0$ y $\Sigma F_y = 7 - 4 - 3 = 0$. Si hubiera un error de signo, alguna de las dos no cerraría.

LOS NUDOS Y LAS BARRAS

▼ Si ya tenías las reacciones, ¿para qué bajaste a los nudos?

Porque Castigliano **suma barra por barra**: necesito N en cada una, no solo las reacciones de apoyo. Las reacciones me cierran el equilibrio global, pero no me dicen cuánta fuerza lleva la diagonal AD, que es la que más aporta. De toda la chapa, AD es la única cuya fuerza depende de Q , así que era obligatorio calcularla.

▼ ¿Por qué CD y BD son nulas?

Nudo C: solo concurren CD (horizontal) y CA (vertical), y la carga aplicada es vertical (4 t ↓). $\Sigma F_x = 0$ deja únicamente $N_{CD} \rightarrow$ vale cero.

Nudo B: solo concurren BA (horizontal) y BD (vertical), con carga horizontal (4 t →). $\Sigma F_y = 0$ deja únicamente $N_{BD} \rightarrow$ vale cero.

Es el mismo patrón de dos barras perpendiculares con la carga alineada con una de ellas.

▼ ¿Por qué AC y AB no contribuyen si sí tienen fuerza?

AC está a -4 t y AB a +4 t, pero **ninguna de las dos depende de Q**: son valores constantes que salen de los nudos C y B, donde Q no interviene. Entonces $\partial N / \partial Q = 0$ y el término se anula. Otra vez la misma idea: lo que importa no es la magnitud de la fuerza sino su **sensibilidad** a la carga ficticia.

▼ Deriva N_{AD} .

En el nudo A concurren AC (vertical), AB (horizontal), la diagonal AD, la reacción A_y y la carga ficticia Q. La dirección A→D es de (0;0) a (4;3), o sea $(4;3)/5 = (0,8 ; 0,6)$ — triángulo 3-4-5, longitud 5 m. Con $\Sigma F_x = 0$: $0,8 \cdot N_{AD} + N_{AB} + Q = 0$, y con $N_{AB} = +4$: **$N_{AD} = -1,25(4 + Q)$** , negativa, es decir **compresión**. Con $Q = 0$ vale -5 t.

▼ ¿Por qué el término de AD sale positivo si la barra está comprimida?

Porque **la derivada también es negativa**: $N = -5$ y $\partial N / \partial Q = -1,25$, así que el producto $(-5)(-1,25)(5) = +31,25$. El signo del término no depende de si la barra está traccionada o comprimida, sino de si su fuerza crece o decrece con Q. Aquí, al empujar A hacia la derecha, AD se comprime **más**, y por eso contribuye positivamente al desplazamiento.

▼ ¿Cuál barra domina el resultado?

La diagonal **AD**, con 31,25 de los 54 t·m totales: el **58 %**. Tiene sentido físico — es la barra que conecta directamente el punto A que estoy midiendo con el pasador D, por donde sale la carga hacia el pórtico. Es el camino de carga más corto.

▼ Deriva M en la barra DE.

Corte a una distancia s desde D, quedándome con el trozo de la izquierda. Sobre él solo actúa lo que entra por el pasador: la componente vertical $(3+0,75Q) = 0,75(4+Q)$, con brazo s , y la horizontal $(4+Q)$, que es **colineal con DE** y no da momento. Queda **$M = 0,75(4+Q) \cdot s$** y $\partial M / \partial Q = 0,75s$.

▼ ¿Cómo comprobaste M en DE?

Evaluando en el extremo, $s = 4$ m: $M = 0,75(4+Q)(4) = 12 + 3Q$, y con $Q = 0$ da **12 t·m** — exactamente el momento aplicado en E. Es una comprobación redonda: el momento que trae la viga DE al llegar a E cuadra con el momento externo aplicado ahí. Si no cuadrara, tendría un error de estática.

▼ Deriva M en la columna EF.

Corte a una distancia t desde E hacia abajo, con el trozo de arriba. Tres aportes:

(1) la carga distribuida de 2 t/m sobre la longitud t : resultante $2t$ con brazo $t/2 \rightarrow t^2$;

(2) el **momento residual** en E: lo que trae DE es $(12+3Q)$ y el momento aplicado es 12, así que sobra $3Q \rightarrow$ término **$-3Q$** ;

(3) la **fuerza horizontal residual**: por DE entra $(4+Q)$ y la carga aplicada en E se lleva 4, así que sobra Q , con brazo $t \rightarrow$ término **$-Qt$** .

Total: **$M = t^2 - Q(3 + t)$** , y $\partial M / \partial Q = -(3 + t)$. Con $Q = 0$ queda simplemente $M = t^2$.

▼ ¿Por qué el momento de 12 t·m no aparece en $\partial M / \partial Q$?

Porque es una **carga real y constante**: no depende de Q , así que al derivar respecto a Q desaparece. Pero sí aparece en M evaluado en $Q = 0$ — de hecho es justamente lo que cancela el momento que trae DE y deja la expresión limpia, $M = t^2$. Es la distinción entre lo que se deriva (lo que depende de Q) y lo que se evalúa (todo).

▼ ¿Por qué EF está traccionada?

Porque por el pasador D entra la componente vertical $(3+0,75Q)$ **hacia arriba** sobre el pórtico, y esa fuerza recorre la viga DE como cortante y baja por la columna EF jalando hacia arriba: $N = 0,75(4+Q) = +3$ t con $Q = 0$, **tracción**. La columna está colgando de la viga, no soportándola.

▼ ¿Por qué la flexión aporta apenas el 0,35 %?

Porque los dos tramos flectan **en sentidos opuestos y casi se cancelan**: DE aporta +48 y EF aporta -47,25, y la suma es solo $0,75 \text{ t}\cdot\text{m}^3$. Físicamente, cuando empujo A hacia la derecha, la viga DE y la columna EF giran en sentidos contrarios y sus energías de flexión casi se anulan entre sí. El desplazamiento de A es **prácticamente todo axial**, dominado por la diagonal AD.

▼ ¿No es sospechoso que casi se cancelen?

No, es un fenómeno conocido en este tipo de estructuras. En los cuartos parciales de 2009 y 2014 del mismo profesor, la flexión se anula **completamente** y la carga ficticia viaja solo por los axiales. Aquí no se anula del todo, pero queda residual. Es una señal de que la estructura transmite la carga ficticia predominantemente por vía axial.

▼ ¿Qué criterio de signos usaste para los momentos?

En cada barra escribo M con el sentido que sale de **su propio cuerpo libre**, y derivo $\partial M / \partial Q$ de **esa misma expresión**. La clave es que si a una barra le invierto el criterio, M y $\partial M / \partial Q$ cambian de signo **a la vez**, y el producto $M \cdot (\partial M / \partial Q)$ queda igual. Por eso el criterio puede ser distinto de barra a barra sin problema. Lo que **no** se puede es mezclar criterios dentro de una misma barra: ahí sí se rompe todo.

▼ Comprueba las unidades del resultado.

Axial: $54 \text{ t}\cdot\text{m} / 3150 \text{ t} = 0,01714 \text{ m} \checkmark$. Flexión: $0,75 \text{ t}\cdot\text{m}^3 / 12600 \text{ t}\cdot\text{m}^2 = 0,0000595 \text{ m} \checkmark$. Los dos términos salen en metros y se pueden sumar.

▼ ¿Hacia dónde se mueve A?

Hacia la derecha, 1,72 cm, porque el resultado es positivo y Q la puse hacia la derecha. Y tiene sentido físico: A es un rodillo libre en horizontal, la carga de 4 t en B empuja hacia la derecha y la chapa entera se desplaza en ese sentido pivotando sobre el pasador D.

▼ Si te dijeran que el momento en E es horario y no antihorario, ¿qué cambia?

El método no cambia en absoluto — cambia únicamente el signo con el que ese momento entra en la ecuación de EF. Al invertirlo, el momento que trae DE ya no se cancela con el aplicado sino que se suma, la expresión de M en EF queda distinta y el término de flexión deja de ser residual. El resultado pasaría a $\delta_A \approx 0,0429 \text{ m}$ en vez de 0,0172 m. Yo lo leí antihorario en la figura del enunciado, y así lo declaré en el trabajo.

Problema 4 — Carga máxima P

6 pts

Piden	La carga máxima P con FS = 1,75 contra cedencia y FS = 3 contra pandeo, usando σ_y como tope de σ_{cr} .
Datos	Todos los miembros W250×80 · E = 200 GPa · σ_y = 250 MPa.
Geometría	Armadura de 12 m de luz y 4 m de altura. Cordón inferior A-B-C-D-E (paños de 3 m), cordón superior F-G-H. Diagonales 3-4-5.
Cargas	4P ↓ en F · 3P ↓ en G · 10P ↓ en H.

TU GUION DE 90 SEGUNDOS

"El problema tiene dos mitades: primero **análisis**, después **diseño**.

El análisis es una armadura isostática — 13 barras más 3 reacciones contra 16 ecuaciones de nudos. Saqué las reacciones globales: $E_y = 10P$ y $A_y = 7P$, desiguales porque la carga está descentrada hacia la derecha. Después método de los nudos, empezando por A y por E, que son los únicos con solo dos barras. Salieron tres barras nulas y la más solicitada resultó ser **HE con 12,5P en compresión**.

El diseño son dos criterios. La **cedencia con FS 1,75** da $\sigma_{adm} = 142,86 \text{ MPa}$ y $N_{adm} = 1457 \text{ kN}$. El **pandeo con FS 3** es lo interesante: el enunciado dice usar σ_y como tope de σ_{cr} , y eso resulta clave, porque las esbelteces son bajas — la mayor es $L/r = 76,9$, muy por debajo de la esbeltez límite de 125,7. Con esa esbeltez, Euler daría 333,6 MPa, **más que la cedencia**, lo cual es físicamente imposible: la barra cedería antes de pandear. Por eso se topa en 250 MPa.

Con el tope: $P_{cr} = 2550 \text{ kN}$ y $P_{adm} = 850 \text{ kN}$. Rige HE: $12,5P \leq 850 \rightarrow \mathbf{P = 68 \text{ kN}}$. Y manda el pandeo, no la cedencia."

LAS TRES RESTRICCIONES

Cedencia sobre la máxima tracción (7,5P): $P \leq 194,29 \text{ kN}$

Cedencia sobre la máxima compresión (12,5P): $P \leq 116,57 \text{ kN}$

Pandeo sobre la máxima compresión (12,5P): $P \leq 68,00 \text{ kN} \leftarrow$ rige

$P_{\text{máx}} = 68 \text{ kN}$ — controla el pandeo del miembro HE

Miembro	L (m)	Fuerza	Tipo	Miembro	L (m)	Fuerza	Tipo
AB	3	5,25 P	T	BF	4	0	nula
BC	3	5,25 P	T	CG	4	3,00 P	C
CD	3	7,50 P	T	DH	4	0	nula
DE	3	7,50 P	T	AF	5	8,75 P	C
FG	3	7,50 P	C	FC	5	3,75 P	T
GH	3	7,50 P	C	CH	5	0	nula
				HE	5	12,50 P	C $\leftarrow$ la mayor

Banco de preguntas

LA ARMADURA

- ▼ Demuestra que la armadura es isostática.

$b + r = 13 \text{ barras} + 3 \text{ reacciones (A pasador: } A_x, A_y; \text{ E rodillo: } E_y) = 16 \text{ incógnitas. Ecuaciones: } 2n = 2 \times 8 \text{ nudos} = 16. \text{ G.D.H.} = 16 - 16 = 0, \text{ isostática. Y es estable porque está completamente triangulada.}$

- ▼ ¿Cómo sacaste las reacciones?

$\Sigma M_A = 0: E_y(12) = 4P(3) + 3P(6) + 10P(9) = 12P + 18P + 90P = 120P \rightarrow E_y = 10P. \text{ Luego } \Sigma F_y = 0: A_y = 17P - 10P = 7P. \text{ Y } \Sigma F_x = 0 \rightarrow A_x = 0, \text{ porque no hay cargas horizontales.}$

▼ ¿Por qué E_y es mayor que A_y ?

Porque la resultante de las cargas está claramente **descentrada hacia la derecha**: la carga más grande, $10P$, está en H, a 9 m de A y a solo 3 m de E. El apoyo más cercano al centro de gravedad de la carga se lleva más. La resultante de $17P$ actúa a $120P/17P = 7,06$ m de A, o sea a la derecha del centro de la luz.

▼ ¿Por qué empezaste por los nudos A y E?

Porque son los únicos donde concurren **solo dos barras** con fuerza desconocida, y además ya conozco la reacción. Dos ecuaciones, dos incógnitas: se resuelven directamente. Desde ahí se va propagando hacia adentro. Ésa es la regla del método de los nudos.

▼ ¿De dónde salen el 0,6 y el 0,8?

De la geometría de las diagonales: 3 m horizontales y 4 m verticales, así que la diagonal mide $\sqrt{9+16} = 5$ m. Triángulo 3-4-5. Entonces $\cos \theta = 3/5 = \mathbf{0,6}$ y $\sin \theta = 4/5 = \mathbf{0,8}$. Aparecen en todas las descomposiciones de diagonales.

▼ ¿Por qué BF y DH son nulas?

Por la regla de las **dos barras colineales más una tercera**: en el nudo B concurren AB y BC, que son colineales (ambas horizontales, en el cordón inferior), y BF, que es perpendicular, sin ninguna carga aplicada en B. La ecuación $\sum F_y = 0$ solo contiene $N_{BF} \rightarrow$ vale cero. En D pasa exactamente lo mismo con CD, DE y DH.

▼ ¿Y CH? Ahí no aplica esa regla.

Correcto, CH no se ve a simple vista: **sale del cálculo**. En el nudo H, $\sum F_y = 0$ da $0,8(12,5P) - 0,8 \cdot N_{HC} - 10P = 0$, o sea $10P - 0,8 \cdot N_{HC} - 10P = 0 \rightarrow \mathbf{N_{HC} = 0}$. Lo que ocurre es que la componente vertical de HE equilibra **exactamente** los $10P$ aplicados en H, sin dejar nada para la otra diagonal. Es una coincidencia numérica de esta combinación de cargas, no una propiedad geométrica.

▼ ¿Cómo comprobaste la armadura?

Con el **nudo C**, que no usé para resolver — quedó de sobra porque la armadura es isostática y un nudo siempre queda como verificación. Sus dos ecuaciones cierran:

$$\Sigma F_y: 0,8(3,75P) - 3P + 0,8(0) = 3P - 3P = \mathbf{0} \checkmark$$

$$\Sigma F_x: -5,25P + 7,5P - 0,6(3,75P) + 0,6(0) = \mathbf{0} \checkmark$$

Si hubiera un error de signo en cualquier barra anterior, este nudo no cerraría.

▼ ¿Por qué HE es la barra más solicitada?

Por dos razones que se suman: está del lado del apoyo E, que recibe la reacción mayor (10P), y está directamente conectada al nudo H, donde cuelga la carga más grande (10P). Es la barra que canaliza casi toda esa carga hacia el apoyo. Su fuerza, 12,5P, es $10P/0,8$ — literalmente la carga de H dividida entre el seno de la diagonal.

▼ ¿Por qué el enunciado pide indicar tracción o compresión?

Porque **el signo decide qué criterio de falla aplica**. Un miembro traccionado solo puede fallar por cedencia. Un miembro comprimido puede fallar por cedencia **o por pandeo**, y el pandeo suele ser mucho más restrictivo. Sin la columna de tipo, la tabla no sirve para diseñar.

EL PERFIL

▼ ¿Qué propiedades del W250×80 usaste y de dónde salen?

De la tabla de perfiles W: **A = 10 200 mm²** (102 cm²), $I_x = 126 \times 10^6 \text{ mm}^4$, **$I_y = 43,1 \times 10^6 \text{ mm}^4$** , $r_x = 111 \text{ mm}$, **$r_y = 65,0 \text{ mm}$** . Para el área uso el valor total; para el pandeo, el radio de giro **mínimo**.

▼ ¿Por qué usaste r_y y no r_x ?

Porque una columna **pandea siempre por su eje de menor inercia**. El menor radio de giro da la mayor esbeltez L/r , y la mayor esbeltez da la menor tensión crítica. Es el eje débil: con $r_y = 65 \text{ mm}$ la esbeltez de HE es 76,9, mientras que con $r_x = 111 \text{ mm}$ sería 45,0. Usar r_x sería quedarse del lado inseguro.

▼ ¿Y si el miembro estuviera arriostrado lateralmente?

Entonces habría que comparar dos esbelteces: L/r_x con la longitud completa, y $L_{\text{arriostrada}}/r_y$ con la distancia entre arriostres. Mandaría la mayor de las dos. Como el enunciado no menciona arriostramiento, se toma el caso más desfavorable: r_y con la longitud completa de la barra.

▼ ¿Qué factor K de longitud efectiva usaste?

K = 1, extremos articulados, que es la hipótesis propia de una armadura ideal: los nudos son pasadores y no transmiten momento. Entonces $L_e = KL = L$. Si los nudos fueran soldados y rígidos, K sería menor (del orden de 0,7–0,8) y la barra resistiría más — así que K = 1 es conservador.

LOS DOS CRITERIOS

▼ Desarrolla el criterio de cedencia.

$\sigma_{\text{adm}} = \sigma_y / FS = 250 / 1,75 = \mathbf{142,86 \text{ MPa}}$. La fuerza admisible por sección es $N_{\text{adm}} = \sigma_{\text{adm}} \cdot A = 142,86 \times 10\,200 = 1\,457\,143 \text{ N} = \mathbf{1457,14 \text{ kN}}$. Aplicándolo a la máxima tracción (7,5P en CD y DE): $P \leq 194,29 \text{ kN}$. A la máxima compresión (12,5P en HE): $P \leq \mathbf{116,57 \text{ kN}}$, que es el que manda dentro de este criterio.

▼ ¿Por qué aplicaste la cedencia también a los comprimidos y no solo a los traccionados?

Porque el enunciado dice literalmente "falla por **cedencia**", no "falla por tracción". La cedencia es una propiedad del material y le aplica a cualquier miembro que alcance σ_y , esté traccionado o comprimido. Presentarlo completo cubre las dos posibilidades. Dicho eso, en este problema el resultado final no cambia — porque el pandeo del comprimido es más estricto que su cedencia — pero eso es un resultado, no un supuesto de partida.

▼ Una compañera solo chequeó tracción para la cedencia. ¿Está mal?

Llega al mismo número, 68 kN, y por lo tanto la respuesta final es correcta. Pero el razonamiento queda incompleto: solo funciona porque en este caso el pandeo tapa a la cedencia en compresión. Si el factor de seguridad de pandeo hubiera sido menor que el de cedencia, o si las esbelteces fueran distintas, esa omisión podría dar un resultado inseguro. Yo lo presenté con las **tres restricciones** explícitas y señalé cuál rige.

▼ Desarrolla el criterio de pandeo.

$\sigma_{cr} = \pi^2 E / (L/r)^2$, con el tope $\sigma_{cr} \leq \sigma_y = 250$ MPa que impone el enunciado. Calculé la esbeltez de las cuatro barras comprimidas y en las cuatro Euler daba más de 250 MPa, así que en todas se usa el tope. Entonces $P_{cr} = 250 \times 10\,200 = \mathbf{2550\text{ kN}}$ para cualquiera de ellas, y $P_{adm} = 2550/3 = \mathbf{850\text{ kN}}$. Rige HE: $12,5P \leq 850 \rightarrow \mathbf{P = 68\text{ kN}}$.

Barra	L (mm)	L/r _y	σ_{cr} Euler	σ_{cr} usada	Límite de P
FG, GH	3000	46,15	926,6 MPa	250	$7,5P \leq 850 \rightarrow 113,33$
CG	4000	61,54	521,2 MPa	250	$3P \leq 850 \rightarrow 283,33$
AF	5000	76,92	333,6 MPa	250	$8,75P \leq 850 \rightarrow 97,14$
HE	5000	76,92	333,6 MPa	250	$12,5P \leq 850 \rightarrow 68,00$

▼ ¿Por qué no puedes usar Euler directamente?

Ésta es la pregunta clave del problema. La fórmula de Euler solo es válida mientras el material siga en **régimen elástico**, es decir, mientras $\sigma_{cr} \leq \sigma_{proporcional} \approx \sigma_y$. Con $L/r = 76,92$, Euler predice $\sigma_{cr} = \pi^2(200\,000)/76,92^2 = \mathbf{333,6\text{ MPa}}$, que es **mayor que la cedencia de 250 MPa**. Eso es físicamente imposible: la barra habría cedido mucho antes de llegar a esa tensión, así que nunca alcanzaría la carga de pandeo elástico. Por eso hay que topar en σ_y , y el enunciado lo dice explícitamente: "usar la tensión de cedencia como valor máximo de la tensión crítica".

▼ ¿Cuál es la esbeltez límite y cuánto vale aquí?

Es la esbeltez donde Euler predice exactamente σ_y : $\lambda_c = \sqrt{2\pi^2 E / \sigma_y} = \sqrt{2\pi^2 \times 200\,000 / 250} = \mathbf{125,7}$. (Con el criterio de $\sigma_y/2$, que es el de AISC-ASD; con el criterio de σ_y puro sería $\pi\sqrt{E/\sigma_y} = 88,9$. En cualquiera de los dos, mis barras están por debajo.) Las esbelteces de mis barras son $76,9 \cdot 61,5 \cdot 46,2$ — **todas por debajo**. Ninguna está en la zona de Euler: todas son columnas cortas o intermedias, y todas se topan en la cedencia.

▼ Si todos los criterios usan σ_y , ¿qué diferencia hay entre pandeo y cedencia?

Solo el **factor de seguridad**: 1,75 contra 3. Con el mismo tope σ_y , el límite de pandeo es $\sigma_y A/3 = 850$ kN y el de cedencia $\sigma_y A/1,75 = 1457$ kN. La relación es $1,75/3 = 0,583 < 1$, así que **el pandeo siempre es más estricto** en un miembro comprimido, y verificar la cedencia en un comprimido resulta redundante en este problema. Eso lo puedo demostrar en general, no solo comprobarlo caso por caso.

▼ ¿Por qué el FS de pandeo es mayor que el de cedencia?

Porque son fallas de naturaleza distinta. La **cedencia es dúctil**: el acero fluye, se deforma visiblemente, redistribuye esfuerzos y avisa antes de colapsar. El **pandeo es una inestabilidad**: es súbito, sin aviso, catastrófico, y además es **enormemente sensible a las imperfecciones** — curvatura inicial de la barra, excentricidad de la carga, tensiones residuales de laminación, desalineación de los nudos. Como la predicción teórica es menos confiable y la consecuencia peor, la norma exige más margen.

▼ ¿Qué barras chequeaste a pandeo y por qué solo esas?

Solo las **comprimidas**: FG y GH ($-7,5P$), CG ($-3P$), AF ($-8,75P$) y HE ($-12,5P$). Las traccionadas no pandean — el pandeo es una inestabilidad de compresión; la tracción, al contrario, endereza la barra y la estabiliza.

▼ AF también mide 5 m. ¿Por qué no rige ella?

Porque tiene menos fuerza: $8,75P$ contra $12,5P$ de HE. Como las dos tienen la misma longitud, la misma esbeltez y por tanto el mismo $P_{adm} = 850$ kN, el límite lo pone la barra con más fuerza: $850/12,5 = \mathbf{68,0}$ contra $850/8,75 = 97,1$. Gana la más cargada.

▼ ¿Y FG y GH, que son más cortas y por tanto menos esbeltas?

Su esbeltez es menor (46,15) pero **eso no las ayuda**, porque igual se topan en σ_y : el P_{adm} es el mismo 850 kN para todas. Y su fuerza es $7,5P$, menor que la de HE, así que su límite es $850/7,5 = 113,33$ kN. No rigen. Ojo con esto: **en este problema la longitud no cambia nada**, porque todas están topadas en la cedencia. Solo importa la magnitud de la fuerza.

▼ ¿Y si HE midiera 10 m en vez de 5?

La esbeltez pasaría a $10\,000/65 = 153,8$, que ya **supera** $\lambda_c = 125,7$. Ahí sí entraría en zona de Euler: $\sigma_{cr} = \pi^2(200\,000)/153,8^2 = \mathbf{83,4\ MPa}$, mucho menor que 250. $P_{cr} = 850\ \text{kN}$, $P_{adm} = 283\ \text{kN}$, y P bajaría a $283/12,5 \approx \mathbf{22,7\ kN}$: un tercio de lo actual. Ahí sí la longitud sería determinante.

CIERRE Y LECTURA DEL RESULTADO

▼ Verifica que $P = 68\ \text{kN}$ cumple los dos criterios.

Fuerza en HE: $12,5 \times 68 = \mathbf{850\ kN}$. Tensión: $850\,000\ \text{N} / 10\,200\ \text{mm}^2 = \mathbf{83,33\ MPa}$. Contra pandeo: $\sigma_{cr}/\sigma = 250/83,33 = \mathbf{3,00}$ ✓ exactamente el FS pedido. Contra cedencia en la máxima tracción: $7,5 \times 68 = 510\ \text{kN} \rightarrow 50\ \text{MPa} \rightarrow \text{FS} = 250/50 = \mathbf{5,0}$, muy por encima del 1,75 requerido ✓. Los dos criterios se satisfacen y el de pandeo está justo en el límite, que es lo que caracteriza al criterio que rige.

▼ ¿Qué significan 68 kN en términos de la carga total?

Las cargas de nudo serían $4P = 272\ \text{kN}$ en F, $3P = 204\ \text{kN}$ en G y $10P = 680\ \text{kN}$ en H, para un total de $17P = \mathbf{1156\ kN}$ sobre una armadura de 12 m. Las reacciones: $A_y = 7P = 476\ \text{kN}$ y $E_y = 10P = 680\ \text{kN}$.

▼ ¿Cómo mejorarías el diseño si necesitaras más capacidad?

Lo primero, cambiando **solo la barra HE** por un perfil de mayor área — es la única que rige, y sustituir todos los perfiles sería un desperdicio. Con un área mayor sube P_{cr} proporcionalmente. Si HE estuviera en zona de Euler, otra opción sería arriostrarla en el punto medio para reducir su longitud efectiva; pero aquí no serviría de nada, porque ya está topada en la cedencia y reducir la esbeltez no aumentaría σ_{cr} .

▼ ¿Todos los miembros son del mismo perfil? ¿Es eso razonable?

Sí, el enunciado especifica que todos son W250×80. En la práctica es común por facilidad constructiva y de montaje, aunque sea ineficiente: aquí CH, BF y DH no llevan nada y CG solo 3P, mientras HE va al límite. La consecuencia para el cálculo es que N_{adm} y P_{adm} son iguales para todas las barras, así que **solo compiten por magnitud de fuerza**.

La tarea — viga de balcón por Castigliano

Con cada parcial entregas una tarea de "ejercicio de la vida real". La cuarta es la misma viga de la Tarea 1 (nota 20) resuelta ahora por Castigliano. Puede que te pregunten por ella.

Caso Viga IPE 200 de balcón, empotrada en la pared en A y apuntalada en el extremo B.

Datos $L = 3 \text{ m}$ · $w = 4 \text{ kN/m}$ · $EI = 3880 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$ ($E = 200 \text{ GPa}$, $I = 1,94 \times 10^{-5} \text{ m}^4$).

TU GUION DE 45 SEGUNDOS

"Es hiperestática de primer grado: empotramiento más apoyo. Tomé **R_B como redundante** porque al quitarla queda un voladizo, que es lo más fácil de escribir, y porque en B hay un puntal rígido, así que $\delta_B = \partial U / \partial R_B = 0$ — Menabrea otra vez.

Salen los resultados de tabla: $R_B = 3wL/8 = 4,5 \text{ kN}$, $R_A = 5wL/8 = 7,5 \text{ kN}$ y $M_A = wL^2/8 = 4,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$. Después volví a usar Castigliano, con carga ficticia, para la flecha.

Y el gancho práctico: **sin el puntal** sería un voladizo puro con flecha de 10,44 mm, y el límite de servicio $L/360$ es 8,33 mm — **no cumpliría**. Con el puntal baja a 0,45 mm y el momento de empotramiento cae de 18 a 4,5 kN·m, cuatro veces menos."

▼ ¿Por qué elegiste R_B como redundante y no el momento de empotramiento?

Porque al liberar R_B me queda un **voladizo empotrado en A**, cuya ecuación de momento es inmediata: $M = -w x^2/2$ medido desde el extremo libre. Si liberara M_A me quedaría una viga simplemente apoyada, que también sirve, pero la condición sería sobre el **giro** en A ($\partial U / \partial M_A = 0$), y hay que tener más cuidado con los signos. El resultado es el mismo por cualquiera de los dos caminos.

▼ ¿La flecha máxima está en el centro?

No, y ése es un detalle que suelen preguntar. Por la asimetría de los apoyos, el máximo está **corrido hacia el apoyo simple**: en $x = (15 - \sqrt{33})L/16 = 0,5785 L = 1,735 \text{ m}$, y vale **0,4523 mm**. En el centro exacto vale 0,4349 mm = $wL^4/192EI$. La diferencia es del 4 %.

▼ ¿Dónde está el punto de inflexión?

En $x = L/4 = 0,75 \text{ m}$ desde el empotramiento, donde el momento cambia de signo. A la izquierda de ese punto el momento es negativo (tracciona arriba) y a la derecha, positivo. Es donde la curvatura de la elástica se invierte.

▼ ¿Cuál es el momento que gobierna el diseño?

El de **empotramiento**: $M_A = wL^2/8 = 4,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$. El máximo positivo está en $x = 5L/8$ (donde el cortante se anula) y vale $9wL^2/128 = 2,53 \text{ kN}\cdot\text{m}$ — poco más de la mitad. Así que la sección crítica está en la pared.

▼ ¿Cumple por resistencia?

Con sobra. $\sigma = M/S = 4,5 \text{ kN}\cdot\text{m} / 194 \text{ cm}^3 = \mathbf{23,2 \text{ MPa}}$, contra $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$: factor de seguridad **10,8**. Y ése es justamente el punto del ejercicio: **en un balcón el problema nunca es la resistencia, es la flecha**. El perfil está sobrado estructuralmente y aun así el criterio de servicio es el que decide si lleva puntal o no.

▼ ¿De dónde sale el criterio $L/360$?

Es el límite de servicio habitual para flechas en elementos con acabados frágiles — baldosas, cerámica, revestimientos que se agrietan. $L/360 = 3000/360 = \mathbf{8,33 \text{ mm}}$. Sin puntal la flecha sería $10,44 \text{ mm}$ ($wL^4/8EI$), que **lo excede**. Con puntal, $0,45 \text{ mm} = L/6633$: sobra por un factor de 18.

▼ ¿Cuánto reduce el puntal el momento de empotramiento?

De $wL^2/2 = 18 \text{ kN}\cdot\text{m}$ (voladizo puro) a $wL^2/8 = 4,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$: **cuatro veces menos**. El puntal no solo controla la flecha, también descarga radicalmente la conexión a la pared, que suele ser el detalle más delicado de un balcón.

Preguntas de teoría (pueden caer en cualquier problema)

▼ Enuncia el segundo teorema de Castigliano.

En una estructura de material elástico lineal, la derivada parcial de la energía de deformación respecto a una fuerza aplicada es igual al desplazamiento del punto de aplicación de esa fuerza, medido **en la dirección de la fuerza**: $\delta_i = \partial U / \partial P_i$. Si en vez de una fuerza se deriva respecto a un momento, se obtiene el **giro** en ese punto.

▼ ¿Qué hipótesis necesita el teorema?

Material **elástico lineal** (se cumple la ley de Hooke), **pequeñas deformaciones** (la geometría no cambia apreciablemente al cargar, de modo que el equilibrio se plantea sobre la configuración inicial), y validez de la **superposición**. No vale para materiales no lineales, grandes desplazamientos ni comportamiento plástico.

▼ ¿Qué es el teorema de Menabrea?

El teorema del **trabajo mínimo**: en una estructura hiperestática, las reacciones redundantes adoptan los valores que hacen **mínima la energía de deformación**, o sea $\partial U / \partial R_i = 0$. Es un caso particular de Castigliano: se aplica donde el desplazamiento correspondiente es nulo porque el vínculo lo impide. Lo usé en el Problema 1 y en la tarea.

▼ Escribe las expresiones de la energía de deformación.

Axial: $U = \int N^2 / (2AE) \, dx \rightarrow$ en barras: $\Sigma N^2 L / (2AE)$

Flexión: $U = \int M^2 / (2EI) \, dx$

Cortante: $U = \int f \cdot V^2 / (2GA) \, dx$ ($f = 1, 2$ rectangular)

Torsión: $U = \int T^2 / (2GJ) \, dx$

Y al derivar respecto a una carga P : $\delta = \Sigma N(\partial N / \partial P)L / (AE) + \int M(\partial M / \partial P) / EI \, dx$, que es la forma que usé.

▼ ¿Por qué se puede derivar dentro de la integral?

Porque los **límites de integración no dependen** de la carga P — son la geometría de la barra, que es fija. Por la regla de Leibniz, $\partial / \partial P \int M^2 / (2EI) dx = \int M(\partial M / \partial P) / EI \, dx$. Si la geometría cambiara con la carga (grandes desplazamientos), esto ya no sería válido.

▼ ¿Qué significa un resultado negativo?

Que el desplazamiento va en **sentido contrario** al de la carga respecto a la cual derivé. No es un error: es información. Por eso el sentido de la carga ficticia se puede elegir libremente, y el signo del resultado lo confirma o lo corrige.

▼ ¿Qué relación tiene Castigliano con el trabajo virtual?

Son **equivalentes**. Si en vez de una carga ficticia Q pongo una carga unitaria, entonces $\partial N/\partial Q$ se convierte en la fuerza "n" producida por esa carga unitaria, y la fórmula de Castigliano $\delta = \sum N(\partial N/\partial Q)L/AE$ se vuelve literalmente $\delta = \sum nNL/AE$, que es la fórmula del método de la carga unitaria. Los dos llegan al mismo número; cambia la manera de presentarlo.

▼ ¿Por qué en armaduras no hay integral sino producto?

Porque en una barra de dos fuerzas de sección constante, **N es constante a lo largo de toda la barra**. La integral $\int N(\partial N/\partial P)dx/AE$ se reduce al producto $N(\partial N/\partial P)L/AE$. Solo hace falta integrar cuando la solicitación varía con x , como en la flexión.

▼ ¿Cuándo hay que incluir la energía de cortante?

En elementos **poco esbeltos**, con relación luz/canto menor que unos 5–10, y en vigas de alma delgada. Su aporte es del orden de $(h/L)^2$ respecto al de flexión, así que en piezas esbeltas es menos del 1 % y se desprecia. Además, en los Problemas 2 y 3 el enunciado dice explícitamente "considerar únicamente las deformaciones por flexión y por fuerza axial", así que la decisión viene dada.

▼ ¿Qué es una barra de dos fuerzas?

Una barra cargada **únicamente en sus dos extremos**, ambos articulados, sin cargas intermedias. El equilibrio de un cuerpo con solo dos fuerzas exige que sean iguales, opuestas y colineales, y la única recta que une los dos puntos es el eje de la barra. Conclusión: solo desarrolla **fuerza axial**, sin cortante ni flector.

▼ ¿Cuándo una barra es nula? Nombra los casos.

- (1) Dos barras no colineales en un nudo descargado → las dos son nulas.
- (2) Dos barras colineales más una tercera, en un nudo descargado → la tercera es nula.
- (3) Dos barras en un nudo con carga alineada con una de ellas → la otra es nula.
- (4) Y el caso que no se ve: la que **sale del cálculo**, como CH en el Problema 4, donde la componente vertical de la diagonal equilibra exactamente la carga aplicada.

▼ ¿Qué es la esbeltez y por qué importa?

$\lambda = L_e/r$, la longitud efectiva entre el radio de giro. Mide qué tan propensa es una columna a pandear. Una esbeltez alta significa que la barra es larga y delgada respecto a su sección, y la tensión crítica cae con el **cuadrado** de la esbeltez: $\sigma_{cr} = \pi^2 E / \lambda^2$. Por eso duplicar la longitud reduce la capacidad a la cuarta parte.

▼ ¿Cuál es el rango de validez de la fórmula de Euler?

Solo la zona **elástica**: mientras $\sigma_{cr} \leq \sigma_{proporcional} \approx \sigma_y$, es decir, para esbelteces mayores que la esbeltez límite λ_c . Por debajo de λ_c la barra cede antes de pandear elásticamente, y hay que usar otro criterio: el tope en σ_y (que es lo que manda el enunciado del Problema 4), o fórmulas empíricas como la parábola de Johnson o las curvas del AISC.

▼ ¿Por qué la carga de pandeo no depende de la resistencia del material?

Porque en la fórmula de Euler, $P_{cr} = \pi^2 EI / L_e^2$, solo aparece el **módulo de elasticidad E** y la geometría — no aparece σ_y . El pandeo elástico es un problema de **rigidez, no de resistencia**. Un acero de alta resistencia y uno común tienen prácticamente el mismo E, así que pandean con la misma carga. Poner acero más resistente en una columna esbelta no sirve de nada; hay que poner más inercia o acortarla.

Zona roja — los 5 puntos donde te pueden apretar

1 · EL SENTIDO DEL MOMENTO DE 12 T·M EN E (P3)

Es tu punto más vulnerable, porque depende de una **lectura de la figura** y no de un cálculo. Lo leíste **antihorario**.

Respuesta: "Lo leí antihorario en la figura del enunciado, y así lo declaré. Si fuera horario, el momento que trae DE ya no se cancelaría con el aplicado sino que se sumaría, y δ_A pasaría de 0,0172 a **0,0429 m**. El método es exactamente el mismo — cambia solo el signo con el que entra ese momento en la ecuación de EF."

Esa respuesta te salva pase lo que pase: demuestras que sabes exactamente qué depende de esa lectura y que dominas el procedimiento, no un número.

2 · "¿POR QUÉ EL TÉRMINO DE CEDENCIA SOBRE COMPRESIÓN?" (P4)

Si te dicen que sobra, no retrocedas: "El enunciado dice **falla por cedencia**, no por tracción, y la cedencia le aplica a cualquier miembro que alcance σ_y . Es cierto que en este caso el pandeo lo tapa — de hecho lo demostré en general: con el mismo tope σ_y , la relación entre los dos límites es siempre 1,75/3 — pero eso es una **conclusión**, no un supuesto de partida."

3 · "RESUÉLVEME P1 CON OTRA REDUNDANTE"

Es la prueba clásica de si copiaste. No te asustes: no te van a pedir que lo integres completo en la pizarra. Lo que quieren oír es el **planteamiento**: "Quito A_y y me queda una viga apoyada en B y C, que es estable. La condición es $\partial U / \partial A_y = 0$ porque el rodillo en A tampoco cede. Pierdo la simetría, así que tendría que integrar los cuatro tramos en vez de dos. El resultado final es el mismo: 12,5 y 55."

4 · "¿Y EL DESPLAZAMIENTO DE 24,93 CM TE PARECE RAZONABLE?" (P2)

No defiendas lo indefendible. Contesta con criterio de ingeniero: "En una estructura real sería inadmisibles, más de $L/30$. Pero las rigideces del enunciado son deliberadamente bajas — $aE = 400$ t equivale a un área ridícula para acero — precisamente para que los dos términos, flexión y axial, salgan comparables y ninguno se pueda despreciar. Es un ejercicio de método, no un caso de proyecto."

5 · "DERÍVEME M EN ESTA BARRA, AQUÍ MISMO"

Es lo más probable de todo. La receta es **siempre la misma, tres pasos**:

- ① Dibujo el corte y me quedo con **un lado** (el que tenga menos fuerzas).
- ② Sumo momentos de **todo lo que quedó en ese lado**, respecto al corte. Fuerzas colineales con el eje: brazo cero, no dan momento. Distribuidas: resultante en el centroide.
- ③ Derivo **esa misma expresión** respecto a Q.

Si dices los tres pasos en voz alta mientras dibujas, aunque te equivoques en un signo, se ve que sabes.

Chuleta de números — memoriza esto

	Lo que hay que soltar sin pensar
P1	$GH = 1 \cdot A_y = C_y = 5P/16 = 12,5 \text{ kN} \cdot B_y = 11P/8 = 55 \text{ kN} \cdot A_x = 0 \cdot M_B = -30 \text{ kN}\cdot\text{m} \cdot M \text{ bajo carga} = +25 \text{ kN}\cdot\text{m} \cdot \text{suma} = 80 = 2P$
P2	$\delta_{\text{flex}} = 149,33/1200 = 0,12444 \cdot \delta_{\text{ax}} = 49,94/400 = 0,12485 \cdot \delta_D = 0,2493 \text{ m} \rightarrow \cdot N_{BD} = \sqrt{2}(4+Q) \text{ tracción} \cdot L_{BD} = 3\sqrt{2} = 4,243 \text{ m} \cdot BC \text{ nula} \cdot CD = -4 \text{ t} \cdot D_y = 4 \text{ t} \downarrow \cdot M_A = 32 \text{ t}\cdot\text{m}$
P3	$\Sigma_{\text{axial}} = 54 \rightarrow 0,017143 (99,65 \%) \cdot \Sigma_{\text{flex}} = 0,75 \rightarrow 0,0000595 (0,35 \%) \cdot \delta_A = 0,0172 \text{ m} \rightarrow \cdot A_y = 7+0,75Q \cdot D_x = 4+Q \cdot D_y = 3+0,75Q \cdot N_{AD} = -1,25(4+Q) = -5 \text{ t} \cdot DE: +48 \cdot EF: -47,25 \cdot \text{si el momento fuera horario} \rightarrow 0,0429$
P4	$E_y = 10P \cdot A_y = 7P \cdot HE = 12,5P \text{ compresión} \cdot \text{nulas: BF, DH, CH} \cdot A = 10\,200 \text{ mm}^2 \cdot r_y = 65 \text{ mm} \cdot \lambda_{HE} = 76,92 \cdot \lambda_c = 125,7 \cdot \sigma_{\text{Euler}} = 333,6 > 250 \rightarrow \text{tope} \cdot \sigma_{\text{adm}} = 142,86 \cdot N_{\text{adm}} = 1457,14 \text{ kN} \cdot P_{\text{cr}} = 2550 \text{ kN} \cdot P_{\text{adm}} = 850 \text{ kN} \cdot P_{\text{máx}} = 68 \text{ kN} (\text{rige pandeo})$
Tarea	$R_A = 5wL/8 = 7,5 \text{ kN} \cdot M_A = wL^2/8 = 4,5 \text{ kN}\cdot\text{m} \cdot R_B = 3wL/8 = 4,5 \text{ kN} \cdot \delta_{\text{máx}} = 0,452 \text{ mm en } 0,578L \cdot \sigma = 23,2 \text{ MPa} \cdot \text{sin puntal } 10,44 \text{ mm} > L/360 = 8,33 \text{ mm}$

Las 6 frases que resuelven el 80 % de las preguntas

1. "Cuerpo libre con menos incógnitas primero, y momentos donde más incógnitas tengan brazo cero." — justifica casi cualquier elección de camino.
2. "Lo que suma en Castigliano no es N, es $N \cdot (\partial N / \partial Q) \cdot L$. Si la fuerza no depende de Q, la barra no contribuye por más cargada que esté."
3. "Q se anula después de derivar, nunca antes."
4. "El pasador transmite fuerzas pero no momento — ésa es la ecuación que faltaba."
5. "Euler solo vale en régimen elástico; con esa esbeltez daría más que la cedencia, que es imposible, por eso se topa en σ_y ."
6. "El signo positivo significa que se mueve en el sentido de la carga respecto a la que derivé."

