

Entender Castigliano desde cero

De dónde sale la integral $\int M(\partial M / \partial B_y) dx$, qué es una condición de compatibilidad, y por qué $\delta_B = 0$. Sin dar nada por sabido.

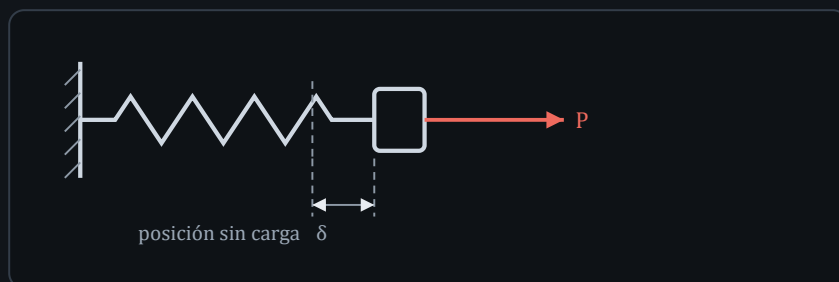
Todo el método se apoya en **una sola idea**, y es esta: cuando cargas una estructura, ella guarda energía adentro, como un resorte comprimido. Si escribes esa energía en función de una fuerza y la derivas respecto a esa fuerza, **te sale el desplazamiento** del punto donde la fuerza está aplicada.

Eso es todo. El resto — las integrales, las derivadas parciales, las cargas ficticias — son detalles de cómo escribir esa energía en cada caso. Vamos a construirlo desde el resorte más simple hasta tu Problema 1, sin saltarnos ningún paso.

PARTE 1

Castigliano completo, en un resorte

Olvídate de vigas por un momento. Ten un resorte con constante k . Le halas con una fuerza P y se estira una cantidad δ .



Un resorte estirado por P . La ley de Hooke dice $P = k \cdot \delta$.

La ley de Hooke dice $P = k \cdot \delta$, o lo mismo, $\delta = P/k$. Y la energía que queda guardada en el resorte es $U = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \delta$ — en la Parte 2 vemos de dónde sale ese $\frac{1}{2}$, que no es obvio.

Ahora hagamos algo aparentemente inocente: escribamos U **solo en función de P** , sustituyendo $\delta = P/k$:

$$U = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \delta = \frac{1}{2} \cdot P \cdot (P/k) = P^2 / (2k)$$

Y ahora derivamos esa expresión respecto a P :

$$dU/dP = d/dP [P^2/(2k)] = \underline{2P}/(2k) = P/k = \delta$$

ESO ES EL TEOREMA DE CASTIGLIANO

La derivada de la energía respecto a la fuerza da el desplazamiento. Con $k = 100$ kN/m y $P = 20$ kN: $\delta = 0,2$ m, $U = \frac{1}{2}(20)(0,2) = 2$ kJ. Y $dU/dP = 20/100 = 0,2$ m. Sale el desplazamiento.

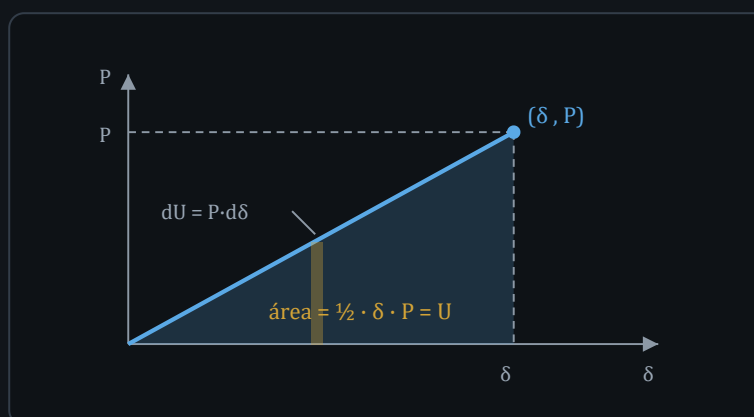
Todo lo que viene de aquí en adelante es **exactamente esto mismo**, solo que la energía de una viga es más complicada de escribir que $P^2/2k$. Pero la mecánica es idéntica: escribo U en función de la fuerza, derivo, y sale el desplazamiento.

PARTE 2

¿De dónde sale el $\frac{1}{2}$?

Este $\frac{1}{2}$ confunde a todo el mundo, así que vale la pena aclararlo. Trabajo = fuerza $\times$ distancia, ¿no? Entonces ¿por qué $U = \frac{1}{2}P\delta$ y no $P\delta$?

Porque **la fuerza no vale P todo el tiempo**. Cuando empiezas a halar, la fuerza vale cero (el resorte está sin estirar). Va creciendo poquito a poco a medida que el resorte se estira, y solo **al final** vale P . Entonces no puedes multiplicar P por δ : tienes que sumar fuerza $\times$ distancia a lo largo de todo el recorrido.



*El trabajo es el **área bajo la gráfica fuerza–desplazamiento**. Como la relación es una recta (material elástico lineal), esa área es un triángulo: $\frac{1}{2}$ base $\times$ altura.*

Cada franjita vertical de la gráfica es un pedacito de trabajo: la fuerza que hay en ese instante, multiplicada por el pedacito que se estiró, $dU = P \cdot d\delta$. Sumar todas esas franjitas es calcular el área bajo la recta. Y el área de un triángulo es $\frac{1}{2}$ **base $\times$ altura** = $\frac{1}{2} \cdot \delta \cdot P$.

GUÁRDATE ESTA FRASE

El $\frac{1}{2}$ aparece siempre que la carga **crece desde cero junto con la deformación**. Es la firma del comportamiento elástico lineal. Vas a ver ese $\frac{1}{2}$ en todas las fórmulas de energía: $U = N^2L/2AE$, $U = \int M^2/2EI \, dx$, $U = \int T^2/2GJ \, dx$. Todas son el mismo triángulo.

PARTE 3

¿Por qué el teorema funciona *siempre*?

Con el resorte lo comprobamos con álgebra de bachillerato. Pero, ¿por qué funciona también en una viga, en un pórtico, en una armadura de 13 barras? Aquí está el argumento, y es bonito.

Imagina una estructura cualquiera con varias cargas: $P_1, P_2, \dots$, y que te interesa el desplazamiento del punto donde está P_i . La energía guardada, U , depende de todas las cargas.

Ahora **cargas la estructura en dos órdenes distintos**:

ORDEN A

Primero todas las cargas, y al final un empujoncito extra

Aplicas todas las cargas normalmente: la estructura guarda una energía U . Después le agregas a P_i un incrementito dP_i . La energía cambia en lo que cambie U al mover esa variable — que es, por definición de derivada:

$$\text{energía total} = U + (\partial U / \partial P_i) \cdot dP_i$$

Primero el empujoncito, y después todas las cargas

Ahora al revés. Primero aplicas **solo** dP_i . Como es una fuerza minúscula que produce un desplazamiento minúsculo, el trabajo que hace es "pequeño $\times$ pequeño": despreciable, de segundo orden.

Después aplicas todas las cargas normales. Guardan su energía U , igual que antes. **Pero además** ocurre algo: mientras la estructura se deforma bajo las cargas normales, el punto i se desplaza una cantidad δ_i ... y dP_i **ya estaba puesta ahí**, siendo arrastrada todo ese recorrido. Esa fuerza hace un trabajo extra de $dP_i \cdot \delta_i$ — **completo, sin $\frac{1}{2}$** , porque dP_i valía lo mismo desde el principio hasta el final; no creció.

$$\text{energía total} = U + dP_i \cdot \delta_i$$

La estructura es elástica: la energía que guarda depende solo de **en qué estado quedó**, no del camino que tomaste para llegar. Los dos órdenes terminan en el mismo estado final, así que las dos energías tienen que ser iguales:

$$(\partial U / \partial P_i) \cdot dP_i = \delta_i \cdot dP_i$$

y cancelando dP_i a los dos lados:

$$\partial U / \partial P_i = \delta_i \quad \leftarrow \text{segundo teorema de Castigliano}$$

LO QUE ACABAS DE DEMOSTRAR

La derivada de la energía respecto a una fuerza es el desplazamiento **del punto donde esa fuerza está aplicada, medido en la dirección de esa fuerza**. Ni en otro punto, ni en otra dirección. Esa restricción es la que después obliga a inventarse las cargas ficticias.

Y si en vez de una fuerza derivas respecto a un **momento**, te da el **giro** — porque el trabajo de un momento es momento $\times$ ángulo, igual que el de una fuerza es fuerza $\times$ distancia.

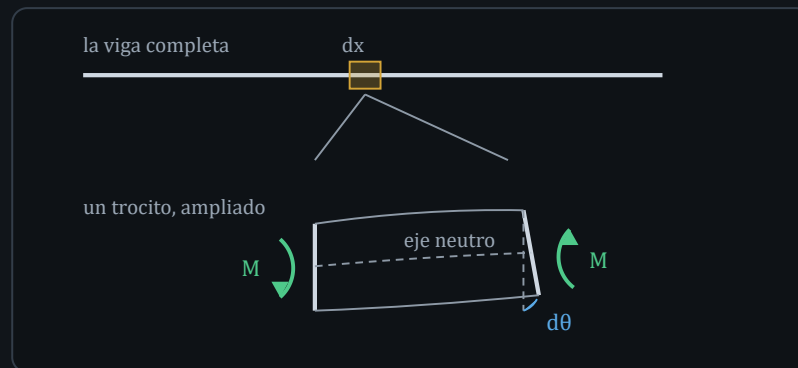
El ∂ ("derivada parcial") significa: **derivo respecto a esa variable y trato a todas las demás como si fueran números fijos**. Si U depende de P_1 , P_2 y P_3 , entonces $\partial U / \partial P_2$ es "cuánto cambia U si muevo P_2 dejando quietas a las otras dos". Nada más que eso.

PARTE 4

La energía de una viga que se dobla

Ya sabemos que hay que escribir U . En el resorte era fácil. ¿Y en una viga?

Truco: **una viga es un montón de resortes de giro pegados en fila**. Córtale un trocito de largo dx . En ese trocito actúa un momento flector M , y el trocito se dobla — sus dos caras dejan de ser paralelas y forman un ángulo $d\theta$.



El trocito dx se dobla un ángulo $d\theta$ bajo el momento M . Es un resorte de giro: cuanto más momento, más se dobla.

De la teoría de flexión ya conoces la relación momento–curvatura:

$$1/\rho = M/EI \quad \text{es decir} \quad d\theta/dx = M/EI \quad \rightarrow \quad d\theta = (M/EI) dx$$

Léelo así: *cuánto se dobla el trocito = el momento que tiene ÷ lo rígido que es*, por su largo. Si EI es grande (viga rígida), se dobla poco. Si M es grande, se dobla mucho. Es exactamente Hooke, pero en versión giro.

Ahora aplico la **misma idea del triángulo** de la Parte 2. El "esfuerzo" es el momento M y el "desplazamiento" es el ángulo $d\theta$. La energía guardada en ese trocito es:

$$dU = \frac{1}{2} \cdot M \cdot d\theta = \frac{1}{2} \cdot M \cdot (M/EI) dx = M^2/(2EI) dx$$

Y para tener la energía de **toda** la viga, sumo todos los trocitos — que es lo que hace una integral:

$$U = \int M^2/(2EI) dx$$

COMPARA CON EL RESORTE

	Resorte	Viga (un trocito)
Lo que empuja	fuerza P	momento M
Lo que se mueve	estiramiento δ	ángulo $d\theta$
Ley elástica	$\delta = P/k$	$d\theta = (M/EI)dx$
Energía	$\frac{1}{2} P \delta = P^2/2k$	$\frac{1}{2} M d\theta = M^2/(2EI)dx$

Es la misma fórmula con otros nombres. **Y la rigidez EI/dx hace el papel de la k del resorte.**

Por el mismo razonamiento salen las otras: para una barra con fuerza axial N, el "estiramiento" es NL/AE , y la energía queda $U = N^2L/(2AE)$. Ésa es la que usas en los problemas 2 y 3 para las barras de armadura.

PARTE 5

De dónde sale $\int M \cdot (\partial M / \partial P) dx / EI$

Ésta es tu pregunta literal, y la respuesta es más sencilla de lo que parece: **es simplemente derivar la integral de la Parte 4**. Nada más. Vamos con calma.

Tenemos $U = \int M^2/(2EI) dx$ y queremos $\partial U / \partial P$, porque eso nos da el desplazamiento. Entonces:

$$\partial U / \partial P = \partial / \partial P \left[\int M^2 / (2EI) dx \right]$$

Obstáculo 1: la derivada está afuera y la P está adentro

La P no aparece por ningún lado en $\int M^2/(2EI) dx$... **aparentemente**. Pero sí está: está **escondida dentro de M**. El momento flector en cada punto de la viga depende de cuánto valga la carga P. Si duplicas P, el momento en cada sección se duplica. Así que en realidad M no es un número: es una función $M(x, P)$.

Para meter la derivada adentro de la integral hay una única condición: que **los límites de integración no dependan de P**. Y aquí no dependen — los límites son 0 y L, la geometría de la viga, que no cambia porque cargues más o menos. Entonces sí se puede:

$$\partial U / \partial P = \int \partial / \partial P \left[M^2 / (2EI) \right] dx$$

Obstáculo 2: derivar M^2 respecto a P

Aquí es donde está el detalle que probablemente te falta. Es la **regla de la cadena**. Recuérdala con un ejemplo suelto: si u es una función de t , entonces

$$d(u^2)/dt = 2 \cdot u \cdot (du/dt)$$

No es $2u$ a secas. Hay que multiplicar además por la derivada de lo de adentro. Ejemplo con números: si $u = 3t + 5$, entonces $u^2 = 9t^2 + 30t + 25$ y su derivada es $18t + 30$. Y por la regla de la cadena: $2u \cdot (du/dt) = 2(3t+5)(3) = 18t + 30$. Igual. ✓

Aplicamos eso mismo con M en lugar de u y P en lugar de t. El $2EI$ es constante respecto a P, así que sale a pasear:

$$\begin{aligned} \partial / \partial P \left[M^2 / (2EI) \right] &= (1/2EI) \cdot \partial(M^2) / \partial P = (1/2EI) \cdot \underline{2 \cdot M \cdot (\partial M / \partial P)} \\ &= M \cdot (\partial M / \partial P) / EI \quad \leftarrow \text{el 2 de arriba mata al 2 de abajo} \end{aligned}$$

Y metiéndolo de vuelta en la integral:

$$\delta = \partial U / \partial P = \int M \cdot (\partial M / \partial P) / EI \cdot dx$$

YA ESTÁ — ÉSE ES TODO EL MISTERIO

La integral que tanto te chocaba **no se "saca" de ningún lado**: es el resultado de derivar $\int M^2 / 2EI \, dx$ respecto a P, usando la regla de la cadena. El famoso $\frac{1}{2}$ de la energía se cancela con el 2 que baja de la potencia. Por eso en la fórmula final **no hay $\frac{1}{2}$** .

¿Y qué significa $\partial M / \partial P$?

Es una **sensibilidad**: cuánto cambia el momento en el punto x si la carga P aumenta una unidad. Un ejemplo concreto de tu Problema 1: en el primer tramo,

$$M_1 = (P - B_y/2) \cdot x$$

$$\partial M_1 / \partial B_y = -x/2 \quad \rightarrow \quad \text{"si } B_y \text{ sube 1 kN, el momento en } x \text{ baja } x/2 \text{ kN}\cdot\text{m"}$$

Fíjate en las unidades: M está en $\text{kN}\cdot\text{m}$ y B_y en kN , así que $\partial M / \partial B_y$ queda en **metros**. Es un chequeo útil: si te da otra cosa, te equivocaste.

EL MISMO RAZONAMIENTO, EN ARMADURAS

En una barra de armadura la fuerza N es constante a lo largo de la barra, así que la energía es $U = N^2 L / (2AE)$ — sin integral, un simple producto. Derivando igual que antes:

$$\partial U / \partial P = 2 \cdot N \cdot (\partial N / \partial P) \cdot L / (2AE) = N (\partial N / \partial P) L / (AE)$$

Y si hay varias barras, se suma sobre todas: $\delta = \sum N (\partial N / \partial P) L / AE$. Ésa es exactamente la fórmula que usaste en los problemas 2 y 3 — y ahora ya sabes por qué es un producto y no una integral: **porque N no varía dentro de la barra**.

PARTE 6

¿Qué es una "condición de compatibilidad"?

Cambio de tema por un momento. Esto es independiente de Castigliano, y es la otra mitad de tu pregunta.

Primero: por qué la estática no alcanza

Tu viga tiene cuatro reacciones incógnitas (A_x , A_y , B_y , C_y) y solo tres ecuaciones de equilibrio ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M = 0$). Con tres ecuaciones no puedes despejar cuatro incógnitas. Punto.

Pero la pregunta profunda es **por qué** la estática se queda corta. Y la razón es importante:

LA RAZÓN DE FONDO

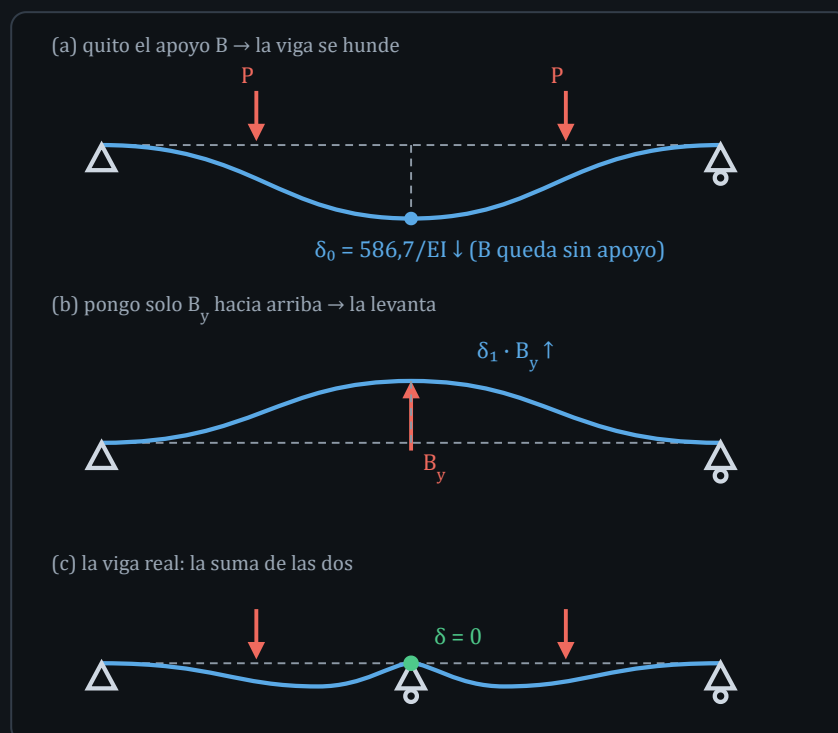
El equilibrio **no sabe nada de cómo se deforma la viga**. A la estática le da igual si la viga es de acero o de gelatina. Y resulta que hay **infinitas combinaciones** de (A_y , B_y , C_y) que suman 80 kN y equilibran los momentos. Por ejemplo $(12,5 \cdot 55 \cdot 12,5)$ equilibra, pero $(20 \cdot 40 \cdot 20)$ también, y $(0 \cdot 80 \cdot 0)$ también. **El equilibrio no puede distinguirlos**.

Lo que las distingue es la **deformación**: de todas esas combinaciones, solo **una** produce una viga deformada que efectivamente *pasa por donde está el apoyo B*. Las demás darían una viga que atraviesa el apoyo o que se despegaría de él — cosas que físicamente no ocurren.

Compatibilidad = "que la deformada encaje con los apoyos"

Una **condición de compatibilidad** es una ecuación que dice: *la forma que toma la estructura al deformarse tiene que ser coherente con lo que los apoyos permiten*. "Compatible" en el sentido de **que no se contradiga**: si hay un apoyo rígido en B, entonces B no puede bajar, y punto.

La forma clásica de verlo es con superposición, en tres pasos:



La condición de compatibilidad: el hundimiento por las cargas y el levantamiento por B_y tienen que cancelarse **exactamente**, para que el punto B termine justo donde está el apoyo.

La condición de compatibilidad, en palabras:

"lo que baja B por las cargas" - "lo que sube B por B_y " = 0

$$\delta_0 - \delta_1 \cdot B_y = 0 \quad \rightarrow \quad B_y = \delta_0 / \delta_1$$

Y con las fórmulas de tabla, para tu viga:

$$\delta_0 = \text{flecha al centro por las dos cargas } P = 1760/3 /EI = 586,67/EI$$

$$\delta_1 = \text{flecha al centro por 1 kN hacia arriba} = 32/3 /EI = 10,67/EI$$

$$B_y = 586,67 / 10,67 = 55 \text{ kN} \quad \leftarrow \text{el mismo resultado, por otro camino}$$

LO IMPORTANTE DE ESTO

Acabas de resolver tu Problema 1 **sin usar Castigliano**, solo con superposición y tablas. Da 55 kN. Eso te dice que la condición de compatibilidad no es un invento del método de la energía: **es una condición física de la estructura**. Castigliano es simplemente otra manera de escribirla — más general, porque no necesitas que exista una fórmula de tabla para tu caso.

PARTE 7

Por qué $\partial U / \partial B_y = 0$

Ahora unimos las dos mitades. Tenemos dos hechos:

De la Parte 3 (Castigliano)	De la Parte 6 (compatibilidad)
$\partial U / \partial B_y$ es el desplazamiento del punto B en la dirección de B_y (vertical).	El desplazamiento vertical de B vale cero , porque ahí hay un apoyo rígido que no lo deja moverse.

Si una cosa es otra, y esa otra *vale cero*, entonces la primera vale cero:

$$\partial U / \partial B_y = \delta_B \quad \text{y} \quad \delta_B = 0 \quad \rightarrow \quad \partial U / \partial B_y = 0$$

Eso es. No hay ningún paso oculto. La condición de compatibilidad es $\delta_B = 0$, y Castigliano es la herramienta que traduce ese " δ_B " a algo que puedo calcular.

Pero espera: ¿ B_y no era una reacción? ¿Cómo la derivo como si fuera una carga?

Ésa es la pregunta correcta, y el truco de la redundante es justamente ése:

EL TRUCO DE LA REDUNDANTE

Le quito el apoyo B a la viga y en su lugar pongo una fuerza desconocida B_y hacia arriba. A partir de ese momento, para todos los efectos del cálculo, B_y **es una carga externa más**, igual que las dos P — solo que no sé cuánto vale.

La viga que queda (apoyada solo en A y C) es **isostática**, así que puedo escribir $M(x)$ con pura estática, sin problemas. Y como B_y es ahora una "carga", Castigliano me permite derivar respecto a ella y obtener el desplazamiento de su punto de aplicación.

Al final impongo que ese desplazamiento sea cero — que es la información que le quité a la viga al eliminar el apoyo. **Le quito el apoyo y lo repongo como ecuación.**

Por qué a esto le dicen "trabajo mínimo"

En cálculo, cuando la derivada de una función vale cero, estás en un máximo o un mínimo. Como $\partial U / \partial B_y = 0$, resulta que el valor verdadero de B_y es el que hace que la energía U sea **mínima**. Ése es el **teorema de Menabrea** o del trabajo mínimo:

De todos los repartos de carga que equilibran la estructura, la naturaleza elige el que guarda **menos energía**.

Es un nombre distinto para exactamente lo mismo que acabamos de deducir. Si te lo preguntan, puedes decir las dos cosas: "es Castigliano aplicado donde el desplazamiento es nulo, y también se le conoce como teorema del trabajo mínimo".

PARTE 8

Ahora sí: tu Problema 1, sin saltos

PASO 1

Contar

Incógnitas: $A_x, A_y, B_y, C_y = 4$. Ecuaciones de estática = 3. **Falta 1**, así que necesito **una** condición de compatibilidad. Y $A_x = 0$ de una vez, porque no hay cargas horizontales.

PASO 2

Elegir la redundante y liberar el apoyo

Quito el apoyo B y pongo en su lugar la fuerza desconocida B_y hacia arriba. Lo que queda es una viga simplemente apoyada de 8 m, isostática. La condición que voy a imponer al final es $\delta_B = 0$.

PASO 3

Poner todo en función de B_y

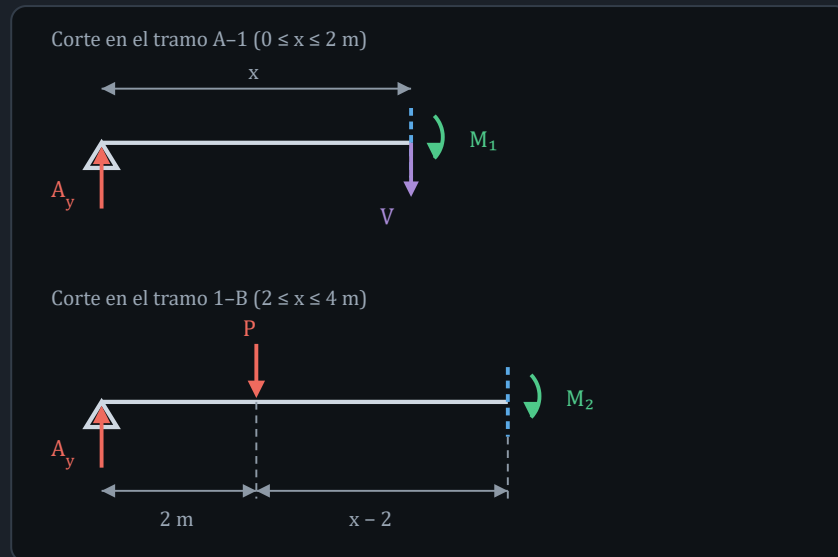
Por simetría (geometría y cargas simétricas respecto a B): $A_y = C_y$. Entonces de $\Sigma F_y = 0$:

$$A_y + B_y + C_y = 2P \quad \rightarrow \quad 2A_y + B_y = 2P \quad \rightarrow \quad A_y = P - B_y/2$$

Ahora todo el problema tiene **una sola incógnita**: B_y .

PASO 4**Escribir $M(x)$ cortando la viga**

Mido x desde A. Hay **dos tramos** porque a los 2 m hay una carga puntual, y el momento cambia de fórmula al pasarla.



Los dos cortes. En cada uno sumo momentos de todo lo que quedó a la izquierda, respecto al corte.

Tramo A-1 ($0 \leq x \leq 2$): $M_1 = A_y \cdot x = (P - B_y/2) \cdot x$

Tramo 1-B ($2 \leq x \leq 4$): $M_2 = A_y \cdot x - P(x - 2) = (P - B_y/2) \cdot x - P(x - 2)$

PASO 5**Derivar respecto a B_y**

B_y aparece **en un solo sitio** de cada expresión: dentro de A_y , multiplicada por x .

Derivando $(P - B_y/2) \cdot x$ respecto a B_y : la P es constante y se va; queda $(-1/2) \cdot x$.

$$\partial M_1 / \partial B_y = -x/2$$

$$\partial M_2 / \partial B_y = -x/2$$

← el término $-P(x-2)$ no contiene B_y , así que

al derivar desaparece: por eso da lo mismo en los dos tramos

PASO 6

Montar la ecuación de compatibilidad

Ya tengo todas las piezas. Aplico Castigliano con la condición $\delta_B = 0$:

$$\delta_B = \partial U / \partial B_y = (1/EI) \int M \cdot (\partial M / \partial B_y) dx = 0$$

Con los dos tramos, y multiplicando por 2 porque la otra mitad de la viga es idéntica por simetría:

$$(2/EI) \left[\int_0^2 M_1 \cdot (-x/2) dx + \int_2^4 M_2 \cdot (-x/2) dx \right] = 0$$

PASO 7

Sacar factor común y limpiar

Como $-x/2$ es el mismo factor en los dos tramos, se saca afuera:

$$(2/EI) \cdot (-1/2) \left[\int_0^2 M_1 \cdot x dx + \int_2^4 M_2 \cdot x dx \right] = 0$$

$$(-1/EI) \left[\dots \right] = 0$$

Y como $-1/EI$ nunca es cero (EI es finito y positivo), quien tiene que ser cero es el corchete:

$$\int_0^2 M_1 \cdot x dx + \int_2^4 M_2 \cdot x dx = 0$$

Aquí es donde desaparece EI, y por eso las reacciones no dependen del material.

PASO 8

Sustituir e integrar

Llamo $R = A_y = P - B_y/2$ para escribir menos:

$$\int_0^2 R \cdot x^2 \, dx + \int_2^4 [R \cdot x^2 - P(x-2) \cdot x] \, dx = 0$$

Las dos integrales de $R \cdot x^2$ son la misma función en tramos seguidos ($0 \rightarrow 2$ y $2 \rightarrow 4$),

así que se juntan en una sola de 0 a 4, y el otro término pasa al otro lado:

$$\int_0^4 R \cdot x^2 \, dx = \int_2^4 P(x-2) \cdot x \, dx$$

$$\text{Izquierda: } R \cdot [x^3/3]_0^4 = R \cdot (64/3)$$

$$\begin{aligned} \text{Derecha: } P \cdot \int_2^4 (x^2 - 2x) \, dx &= P \cdot [x^3/3 - x^2]_2^4 \\ &= P \cdot [(64/3 - 16) - (8/3 - 4)] = P \cdot (20/3) \end{aligned}$$

PASO 9

Despejar

$$R \cdot (64/3) = P \cdot (20/3) \quad \rightarrow \quad R = 20P/64 = \mathbf{5P/16}$$

$$A_y = C_y = 5(40)/16 = \mathbf{12,5 \, kN \, \uparrow}$$

$$B_y = 2P - 2A_y = 80 - 25 = \mathbf{55 \, kN \, \uparrow}$$

$$\text{Comprobación: } 12,5 + 55 + 12,5 = 80 = 2P \quad \checkmark$$

PARTE 9

La prueba de que de verdad funciona

Todo lo anterior está muy bien, pero: ¿de verdad esa integral "sabe" dónde está el apoyo? Compruébalo tú mismo. Toma la integral del Paso 7 y **métele distintos valores de B_y** :

Si B_y fuera...	Tramo A-1	Tramo 1-B	Suma	Significado
40 kN (muy poco)	$-80/3$	$-160/3$	-80	negativo → B baja : el apoyo no empuja lo suficiente y la viga se le hunde encima
55 kN	$-50/3$	$+50/3$	0	B no se mueve → es el valor correcto
60 kN (mucho)	$-40/3$	+40	$+80/3$	positivo → B sube : el apoyo empuja de más y levantaría la viga

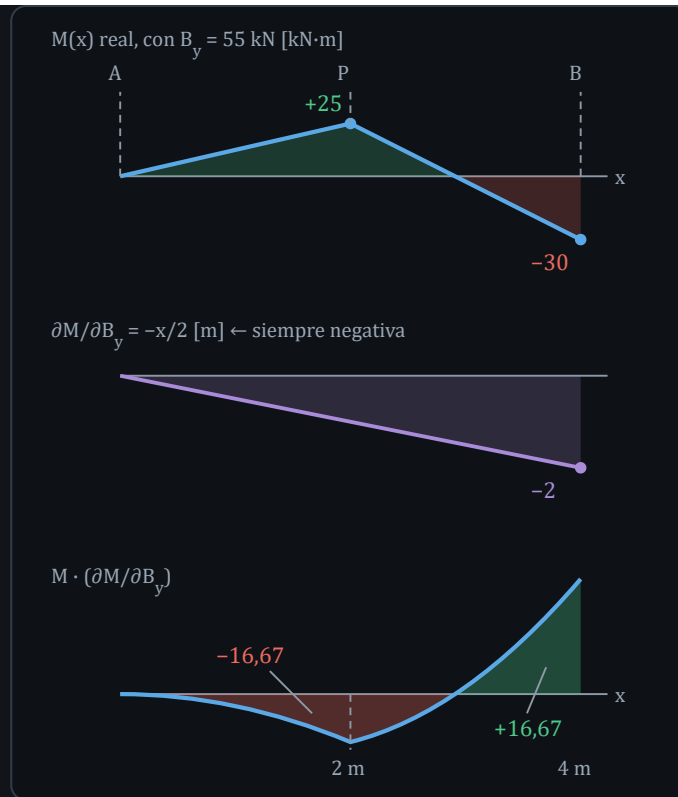
ESTO ES LO QUE HAY QUE ENTENDER

La integral **no es un artificio matemático**: es literalmente el desplazamiento de B, en metros (dividido entre EI). Le metes un B_y equivocado y te dice hacia dónde se movería el punto. Solo con el valor correcto da cero, que es lo que el apoyo obliga.

Igualar la integral a cero es igualar el desplazamiento de B a cero. Es la misma frase.

Y ahora, viéndolo dibujado

Mira los tres diagramas. Arriba, el momento real $M(x)$ con $B_y = 55$. En medio, la sensibilidad $\partial M / \partial B_y = -x/2$. Abajo, el producto de los dos — que es lo que estás integrando.



El área bajo la curva de abajo es $\delta_B \cdot El$. La parte roja ($-16,67$) y la verde ($+16,67$) se cancelan exactamente. **Eso, visualmente, es la condición de compatibilidad.**

Fíjate en lo que dice ese dibujo: la integral no da cero porque M sea cero — M no es cero en casi ningún punto. Da cero porque **el área negativa y el área positiva se compensan exactamente**. Y eso ocurre **solo** con $B_y = 55$. Con cualquier otro valor, una de las dos áreas gana y el punto B se movería.

Un regalo extra: qué es realmente $\partial M / \partial B_y$

Ese $-x/2$ del panel del medio no es un número cualquiera. Haz esta prueba: toma la viga simplemente apoyada de 8 m (sin apoyo en B) y ponle **una carga de 1 kN hacia arriba justo en el centro**. Las reacciones en A y C salen de 0,5 kN **hacia abajo** cada una, y el momento a una distancia x de A es $M = -0,5x = -x/2$.

IDÉNTICO

$\partial M / \partial B_y$ es exactamente el diagrama de momentos que produciría una carga unitaria aplicada donde está la redundante. No es casualidad: la derivada respecto a una fuerza mide "cuánto momento aporta cada unidad de esa fuerza", que es literalmente el diagrama de la carga unitaria.

Por eso Castigliano y el método de la carga unitaria (trabajo virtual) dan siempre lo mismo: son la misma integral, $\int M \cdot m / EI \, dx$, escrita con distinta notación.

PARTE 10

Y en los problemas 2 y 3: la carga ficticia Q

Con todo lo anterior, la carga ficticia deja de ser magia. Recuerda la restricción del teorema (Parte 3): $\partial U / \partial P$ te da el desplazamiento del punto donde P está aplicada, en la dirección de P. Ni en otro punto, ni en otra dirección.

En el Problema 2 te piden el desplazamiento **horizontal** del nodo D. Pero en D no hay ninguna carga horizontal. Entonces **no hay respecto a qué derivar** — no existe la variable.

La solución es obvia una vez que lo ves así: **si no existe la fuerza, la invento**. Pongo una carga Q horizontal en D, resuelvo la estructura con ella adentro, y ahora sí puedo derivar respecto a Q. Al final le pongo $Q = 0$, y la estructura vuelve a ser la real.

	Problema 1	Problemas 2 y 3
¿Respecto a qué derivo?	B_y , la reacción redundante	Q, una carga inventada
¿Qué me da la derivada?	el desplazamiento vertical de B	el desplazamiento de D (o A) en la dirección de Q
¿Qué hago con eso?	lo igualo a cero : es un apoyo, no se mueve	lo evalúo : es la respuesta que piden
Al final	despejo B_y	hago $Q = 0$ y calculo el número

LOS DOS ERRORES QUE SE COMETEN CON Q

1. Anular Q antes de derivar. Si haces $Q = 0$ primero, pierdes la dependencia y la derivada da cero: el método colapsa. El orden es **derivar y después evaluar**. Piénsalo así: $\partial M / \partial Q$ pregunta "¿cuánto cambia M si muevo Q?", y para responder eso Q tiene que **estar** en la ecuación.

2. Creer que una barra muy cargada tiene que contribuir. Lo que suma es $N \cdot (\partial N / \partial Q) \cdot L$. Si la fuerza de una barra **no depende de Q**, su derivada es cero y el término se anula, aunque la barra tenga 4 toneladas encima. Es lo que pasa con CD en el Problema 2 y con AC y AB en el Problema 3.

El resumen de todo, en cinco líneas

1. Una estructura cargada guarda energía U , como un resorte.
2. Si derivas U respecto a una fuerza, sale el desplazamiento de su punto. (Castigliano)
3. Para una viga, $U = \int M^2 / 2EI \, dx$; al derivarla sale $\int M(\partial M / \partial P) / EI \, dx$. (regla de la cadena)
4. En un apoyo, ese desplazamiento vale cero – eso es la compatibilidad.
5. Igualar la integral a cero da la ecuación que a la estática le faltaba.