

Entender los problemas 2 y 3

La carga ficticia Q , la estática nudo por nudo, el corte en el pasador y el despiece de cada barra. Sin dar nada por sabido.

En el Problema 1 usaste Castigliano **al revés**: no sabías una reacción, y la condición de que el apoyo no se mueve te dio la ecuación que faltaba. Los problemas 2 y 3 usan el teorema **de frente**: te preguntan directamente *cuánto se mueve* un punto, y tú lo calculas.

Eso los hace, en teoría, más fáciles. Lo que los complica es otra cosa: **la estática**. En el P1 la viga tenía dos tramos y ya. Aquí hay barras inclinadas, nudos, un pasador y dos cuerpos. Por eso la mayor parte de esta explicación es estática, no energía.

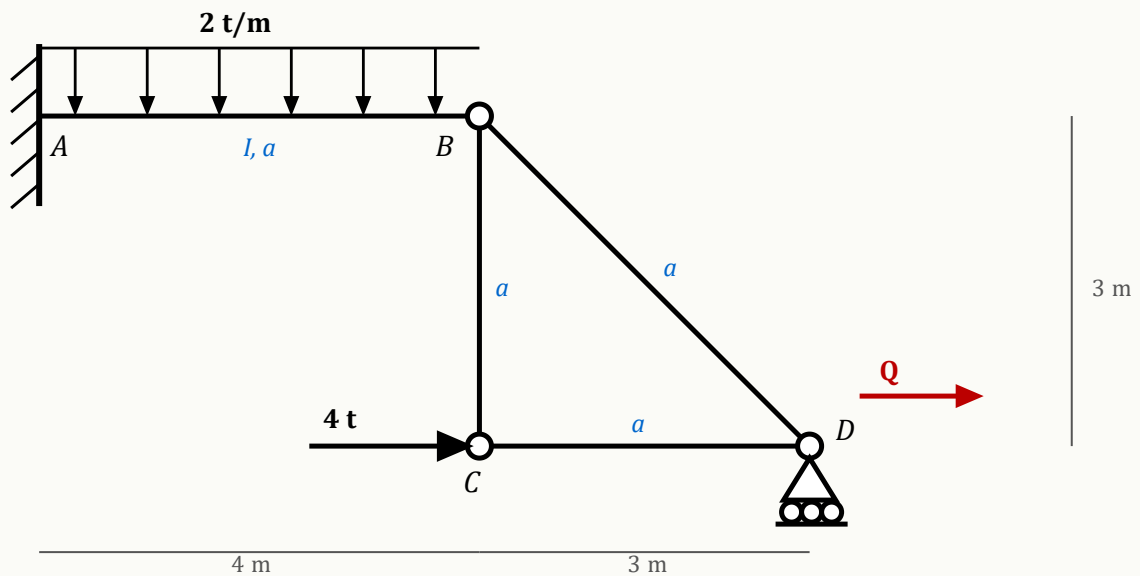
EL MAPA DE LOS DOS PROBLEMAS

- ① Meto una carga ficticia Q donde quiero medir el desplazamiento
- ② Resuelvo TODA la estática con Q adentro ← aquí está el 80 % del trabajo
- ③ DESPIECE: cuerpo libre de cada barra → su N y su $M(x)$, en función de Q
- ④ Derivo respecto a Q y recién ahí hago $Q = 0$
- ⑤ Sumo: $\sum N(\partial N / \partial Q) L / a E + \sum \int M(\partial M / \partial Q) dx / EI$

Los cinco pasos son **idénticos** en los dos problemas. Si te aprendes el esqueleto, lo único que cambia de uno a otro es la estática del paso ②.

PROBLEMA 2

Desplazamiento horizontal del nodo D



La estructura del enunciado, ya con la carga ficticia Q agregada en D .

Te dan: $EI = 1200 \text{ t}\cdot\text{m}^2$ y $aE = 400 \text{ t}$. El miembro AB lleva la etiqueta « I, a » y los miembros BC , CD y BD llevan « a » sola.

LO PRIMERO: QUÉ SIGNIFICAN ESAS ETIQUETAS

Es la convención del profesor y es la instrucción más importante de la figura:

« I, a » = ese miembro se deforma por FLEXIÓN y por AXIAL

« a » = ese miembro se deforma SÓLO por axial (barra de dos fuerzas)

O sea que la figura ya te está diciendo, antes de que calcules nada, que **solo AB va a aportar flexión** y que las otras tres solo aportan axial. Eso te ahorra la mitad del trabajo si lo lees a tiempo.

Paso ① — Por qué hay que inventar una carga

Recuerda la restricción del teorema: $\partial U / \partial P$ te da el desplazamiento del punto donde P está aplicada, medido en la dirección de P . Ni en otro punto, ni en otra dirección.

Te piden el desplazamiento **horizontal de D**. Miras la figura: en D no hay ninguna carga horizontal. Entonces **no existe la variable** respecto a la cual derivar. El problema, tal como está, no se puede ni plantear.

La salida es inventarla. Pongo una fuerza Q horizontal en D , resuelvo la estructura como si Q existiera, derivo respecto a Q , y **al final hago $Q = 0$** para que la estructura vuelva a ser la real.

POR QUÉ ESTO NO ES TRAMPA

Piensa en Q como una **sonda**. Preguntar $\partial U / \partial Q$ es preguntar: «*si yo empujara un poquito en D hacia la derecha, ¿cuánta energía extra guardaría la estructura?*». Y la respuesta a esa pregunta es proporcional a **cuánto se deja empujar** el punto D — es decir, a su desplazamiento.

Al hacer $Q = 0$ la sonda se retira y queda la estructura real. Como el material es elástico lineal, vale superposición y el procedimiento es exacto, no aproximado.

EL ERROR NÚMERO UNO

Nunca hagas $Q = 0$ antes de derivar. Si lo anulas primero, Q desaparece de las ecuaciones y $\partial M / \partial Q$ da cero: el método colapsa y todo te da 0. El orden es **derivar primero, evaluar después**. Piénsalo así: $\partial M / \partial Q$ pregunta «¿cuánto cambia M si muevo Q ?», y para poder responder eso, Q tiene que *estar* en la ecuación.

Antes de la estática: dos ideas que hay que tener claras

IDEA 1

Qué es una barra de dos fuerzas

Una barra articulada en sus dos extremos y **sin ninguna carga entre medio** solo recibe fuerzas en esos dos puntos. Y hay un teorema de estática que dice: si un cuerpo está en equilibrio bajo **solo dos fuerzas**, esas fuerzas tienen que ser **iguales, opuestas y colineales**.

¿Por qué colineales? Porque si no lo fueran formarían un par y el cuerpo giraría. La única recta que pasa por los dos puntos de aplicación es **el eje de la barra**. Conclusión: la fuerza va a lo largo del eje — es **puramente axial**. No hay cortante ni flector.

Por eso BC , CD y BD solo tienen N , y por eso el profesor las rotula con «a» sola.

Qué es el método de los nudos

Un nudo es un punto donde se juntan varias barras. Si toda la estructura está en equilibrio, **cada nudo por separado también lo está**. Y como en un nudo todas las fuerzas concurren en el mismo punto, no hay momentos: solo quedan **dos ecuaciones**, $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$.

Dos ecuaciones por nudo significa que puedes resolver un nudo **si tiene como máximo dos incógnitas**. De ahí la regla: **empieza siempre por el nudo con menos barras desconocidas** y ve avanzando. Aquí ese nudo es C, donde solo llegan dos barras.

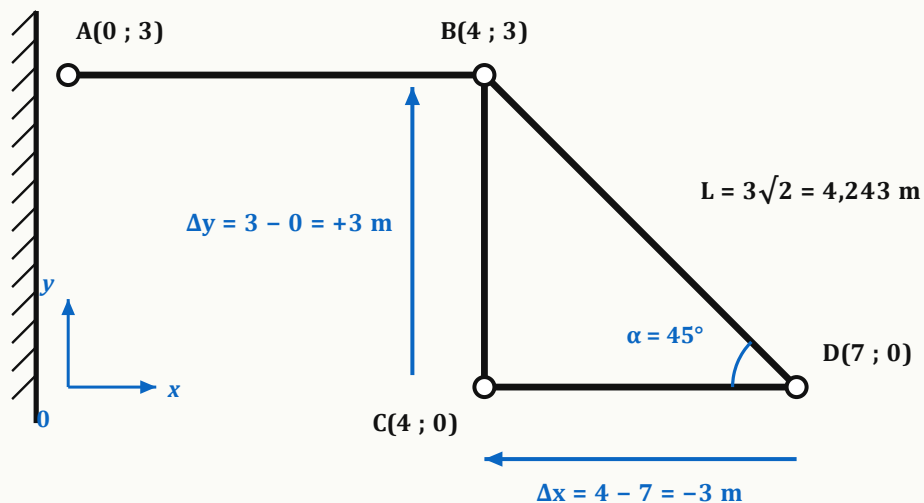
EL SIGNO, QUE ES DONDE TODO EL MUNDO SE ENREDA

N positivo = TRACCIÓN = la barra **jala** al nudo hacia el otro extremo

Supón siempre tracción. Si el número sale negativo, la barra está comprimida y ya: no hay que rehacer nada. Es la convención más segura porque no tienes que adivinar antes de calcular.

Paso ② — La geometría de la diagonal

CB es vertical y CD es horizontal: sus fuerzas ya vienen «partidas», una va entera a ΣF_y y la otra entera a ΣF_x . Pero **BD está inclinada**, así que antes de meterla en cualquier ecuación hay que descomponerla. Y para descomponerla hace falta su dirección.



Coordenadas de los nudos. El vector se arma restando: destino – origen.

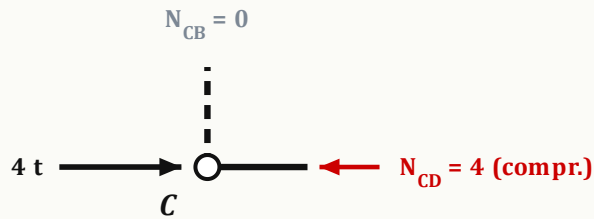
- 1) Extremos: D(7 ; 0) B(4 ; 3)
- 2) Vector D → B = **destino – origen**:

$$B - D = (4 - 7 ; 3 - 0) = (-3 ; +3)$$
- 3) Longitud: $L = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} = 4,243 \text{ m}$
- 4) Unitario: $u = (-3 ; 3)/3\sqrt{2} = (-1/\sqrt{2} ; +1/\sqrt{2})$

El **vector unitario** es el vector dividido entre su propia longitud: apunta en la misma dirección pero mide 1. Sirve porque si una barra lleva una fuerza N, sus componentes son simplemente **N multiplicado por el unitario**. Es la manera de no equivocarse nunca con senos y cosenos.

Como la barra sube 3 m en 3 m horizontales, está a **45°**, y por eso las dos componentes salen iguales: $1/\sqrt{2}$ cada una.

Paso ② (cont.) — Los nudos, uno por uno



Nudo C. Solo llegan dos barras y una carga.

Nudo C (barras CB vertical y CD horizontal + carga 4 t →)

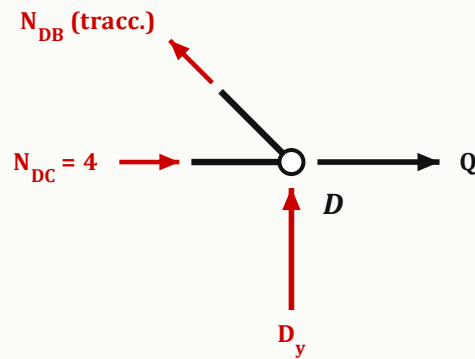
$$\Sigma F_y = 0 : \quad N_{CB} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{BARRA NULA}$$

$$\Sigma F_x = 0 : \quad N_{CD} + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad N_{CD} = -4 \text{ t} \quad (\text{COMPRESIÓN})$$

Lee la primera línea despacio, porque es de las cosas que más se preguntan. En el nudo C, **la única fuerza con componente vertical es la de la barra CB** — CD es horizontal y la carga de 4 t también. Si la suma de todo lo vertical tiene que dar cero y solo hay un término, ese término vale cero. **Por eso BC es una barra nula.**

¿Y ENTONCES PARA QUÉ ESTÁ ESA BARRA?

Es nula **para esta hipótesis de carga**, no siempre. Da estabilidad geométrica al triángulo y empezaría a trabajar en cuanto la carga cambie — por ejemplo, con una fuerza vertical en C. Una barra nula no es una barra inútil: es una barra descargada en esta combinación.



Nudo D. D_y se dibuja hacia arriba, en el sentido positivo supuesto.

Nudo D (barras DC y DB + carga $Q \rightarrow +$ reacción D_y)

DB traccionada jala a D hacia B, o sea según $u = (-1/\sqrt{2} ; +1/\sqrt{2})$:

aporta $-N_{DB}/\sqrt{2}$ en x y $+N_{DB}/\sqrt{2}$ en y

$$\Sigma F_x = 0 : -N_{DC} - N_{DB}/\sqrt{2} + Q = 0$$

$$4 - N_{DB}/\sqrt{2} + Q = 0 \quad (\text{porque } N_{DC} = -4)$$

$$N_{DB} = \sqrt{2} (4 + Q) \quad (\text{TRACCIÓN})$$

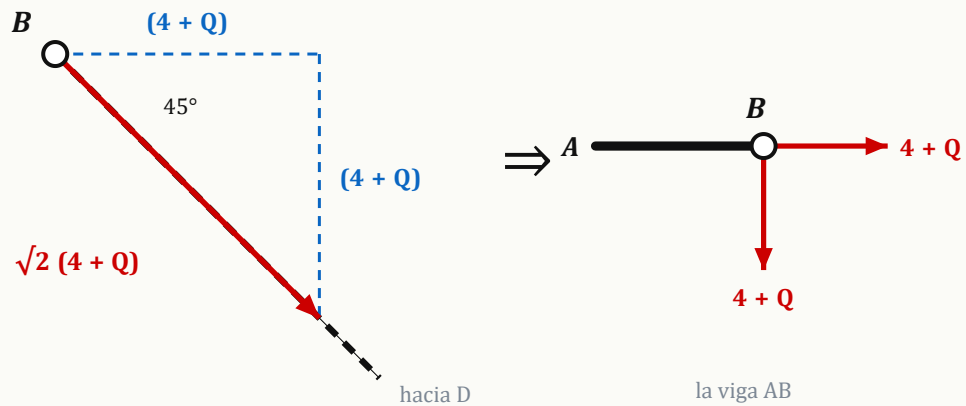
$$\Sigma F_y = 0 : N_{DB}/\sqrt{2} + D_y = 0$$

$$D_y = - (4 + Q) \rightarrow \text{o sea } (4+Q) \text{ hacia ABAJO}$$

Fíjate en el $-N_{DC}$ de la primera ecuación: la barra DC vista desde D apunta hacia la izquierda (hacia C), así que su unitario en x es -1 . Y como N_{DC} vale -4 , el término completo queda $-(-4) = +4$. **Dos signos negativos que se combinan** — es donde más se equivoca la gente, y por eso conviene escribirlo en dos líneas separadas en vez de hacerlo mentalmente.

UN DETALLE FÍSICO QUE VALE LA PENA NOTAR

La reacción D_y sale **hacia abajo**. Eso pasa porque la diagonal está traccionada y jala a D hacia arriba-izquierda; para equilibrar, el apoyo tiene que empujar hacia abajo. Implica que ese rodillo debe poder trabajar en los dos sentidos, o estar anclado. Si te lo preguntan, es un buen detalle que demuestra que leíste el resultado y no solo lo calculaste.



Nudo B: la diagonal jala a B hacia D, y sus componentes son las que cargan la viga AB.

Éste es el nudo que conecta las dos mitades del problema. La **misma** barra BD, vista desde el otro extremo, jala en la **dirección opuesta** — es acción y reacción: una barra traccionada jala a cada uno de sus dos nudos hacia el otro.

$$u_B = (+1/\sqrt{2} ; -1/\sqrt{2}) \quad (\text{el opuesto del de antes})$$

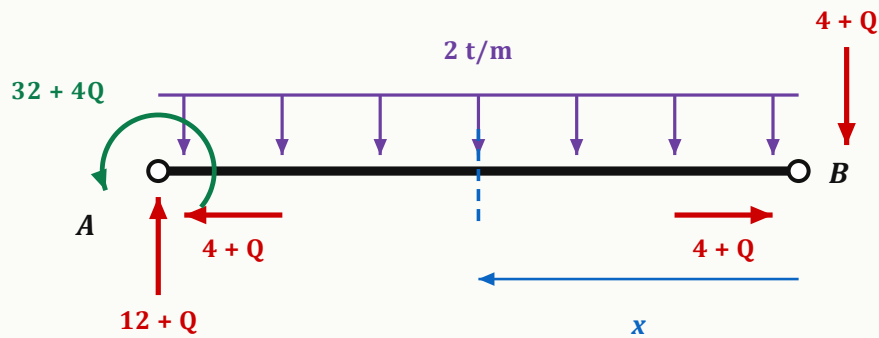
$$\sqrt{2}(4+Q) \cdot (1/\sqrt{2} ; -1/\sqrt{2}) = (\textcolor{brown}{4+Q} ; -\textcolor{brown}{(4+Q)})$$

En B llega: $(4 + Q)$ horizontal $\rightarrow$ y $(4 + Q)$ vertical $\downarrow$

Esas dos componentes son **lo único** que la viga AB recibe por su extremo derecho. Con eso ya se puede hacer su despiece.

Paso ③ — El despiece de la barra AB

«Despiece» quiere decir: aísla la barra, le dibujo su cuerpo libre con todo lo que le llega, la corto por un punto cualquiera y escribo qué solicitaciones hay en ese corte.



Barra AB (l, a) — la única con inercia, y por tanto la única que flexa.

Corte a una distancia x del extremo B, y me quedo con el trozo de la derecha.

Sobre ese trozo actúan solo dos cosas:

- ① la componente vertical $(4+Q)$ que llega en B, con brazo $x \rightarrow (4+Q) \cdot x$
- ② el tramo de distribuida de longitud x : resultante $2x$ en su centroide, a $x/2$ del corte $\rightarrow 2x \cdot (x/2) = x^2$

$$M = (4 + Q) \cdot x + x^2$$

$$\partial M / \partial Q = x$$

$$N = 4 + Q \quad (\text{TRACCIÓN})$$

$$\partial N / \partial Q = 1$$

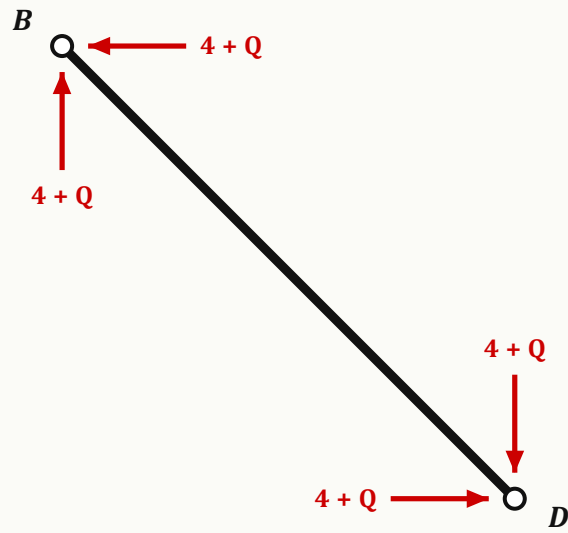
$$L = 4 \text{ m}$$

TRES COSAS DE ESA ECUACIÓN QUE SUELEN PREGUNTARSE

¿Por qué el brazo de la distribuida es $x/2$? Porque la resultante de una carga uniformemente repartida se aplica en el **centroide** del tramo cargado. Si la carga cubre una longitud x , el centroide está a $x/2$ del corte. De ahí el x^2 — el cuadrado es la firma de una distribuida uniforme.

¿Por qué la componente horizontal $(4+Q)$ no da momento? Porque es **colineal con el eje de la barra**: su línea de acción pasa por todos los puntos del eje, así que el brazo respecto a cualquier corte es cero. Esa componente produce el axial, no flexión.

¿Por qué una sola integral de 0 a 4? Porque en ese tramo el momento no tiene discontinuidades: la distribuida es continua y no hay cargas puntuales intermedias que obliguen a partir.

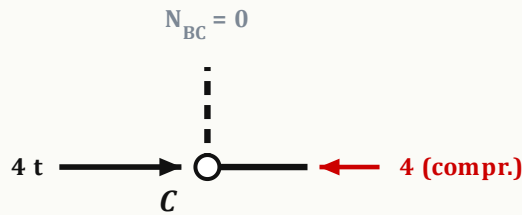


Barra BD — de dos fuerzas, traccionada.

Barra BD $N = \sqrt{2} (4 + Q)$ (TRACCIÓN) $\partial N / \partial Q = \sqrt{2}$ $L = 3\sqrt{2}$



Barra CD — de dos fuerzas, comprimida. No contribuye.



Barra BC — nula. El despiece informativo es el nudo que lo demuestra.

Barra CD $N = -4 \text{ t}$ $\partial N / \partial Q = 0 \rightarrow$ NO CONTRIBUYE

Barra BC $N = 0$ $\partial N / \partial Q = 0 \rightarrow$ NO CONTRIBUYE

LA IDEA MÁS IMPORTANTE DE TODO CASTIGLIANO

La barra CD lleva 4 toneladas de compresión y **aporta cero** al desplazamiento de D.
¿Cómo puede ser?

Porque lo que suma en la fórmula no es N , sino el producto $N \cdot (\partial N / \partial Q) \cdot L$. La fuerza de CD es un -4 fijo que **no depende de Q** , así que su derivada es cero y todo el término se anula.

Dicho en física: si empujo D hacia la derecha, la fuerza viaja por la diagonal BD hasta B y de ahí por la viga AB hasta el empotramiento. **CD y BC quedan fuera de ese camino de carga y no se enteran.** Lo que importa no es cuán cargada está una barra, sino cuánto *cambia* su carga cuando muevo el punto que estoy midiendo.

Pasos ④ y ⑤ — Evaluar en $Q = 0$ y sumar

Ahora sí, con las derivadas ya hechas, pongo $Q = 0$ en todas partes y sumo.

Barra	N (Q=0)	$\partial N/\partial Q$	L (m)	$N \cdot (\partial N/\partial Q) \cdot L$
AB	4	1	4	16
BD	$4\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$24\sqrt{2} = 33,941$
CD	-4	0	3	0
BC	0	0	3	0
Σ				$16 + 24\sqrt{2} = 49,941 \text{ t}\cdot\text{m}$

$$\delta_{\text{axial}} = 49,941 / 400 = 0,124853 \text{ m}$$

Y la flexión, que solo tiene la barra AB:

$$\begin{aligned}
 (1/EI) \int_0^4 (4x + x^2) \cdot (x) \, dx &= (1/EI) \int_0^4 (4x^2 + x^3) \, dx \\
 &= (1/EI) [4x^3/3 + x^4/4]_0^4 \\
 &= (1/EI) [256/3 + 64] = 149,333 / EI
 \end{aligned}$$

$$\delta_{\text{flexión}} = 149,333 / 1200 = 0,124444 \text{ m}$$

$$\delta_D = 0,124444 + 0,124853 = 0,249297 \text{ m} \approx 24,93 \text{ cm} \rightarrow$$

CÓMO SE LEE ESE NÚMERO

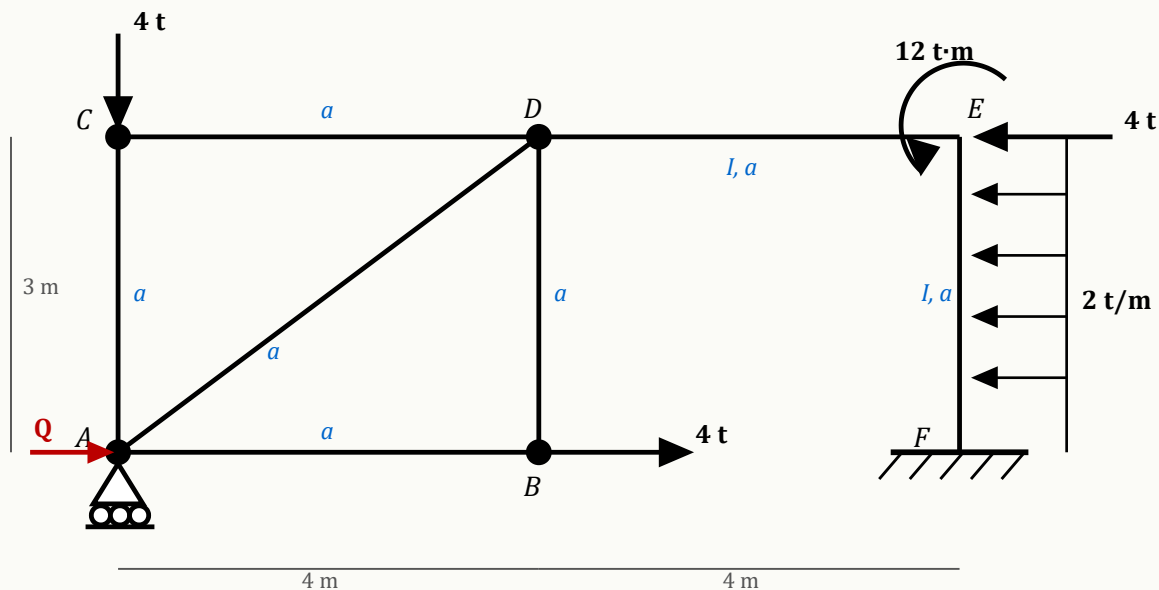
El signo positivo significa que D se mueve **en el mismo sentido que Q**, o sea hacia la derecha. Si hubiera salido negativo, se movería al contrario. Por eso el sentido de Q lo puedes elegir libremente: el signo del resultado te lo confirma o te lo corrige.

Las unidades cuadran: flexión = $[t \cdot m^3]/[t \cdot m^2] = m$, axial = $[t \cdot m]/[t] = m$. Los dos salen en metros, que es lo que permite sumarlos. Si te dan cosas distintas, te equivocaste en algo.

Y sobre el tamaño: 24,93 cm en una estructura real sería inadmisibile. Las rigideces del enunciado son deliberadamente bajas — $aE = 400 \text{ t}$ equivale a un área ridícula para acero — precisamente para que flexión y axial salgan comparables (0,1244 contra 0,1249) y ninguno de los dos se pueda despreciar. Es un ejercicio de método, no un caso de proyecto.

PROBLEMA 3

Desplazamiento horizontal del nodo A



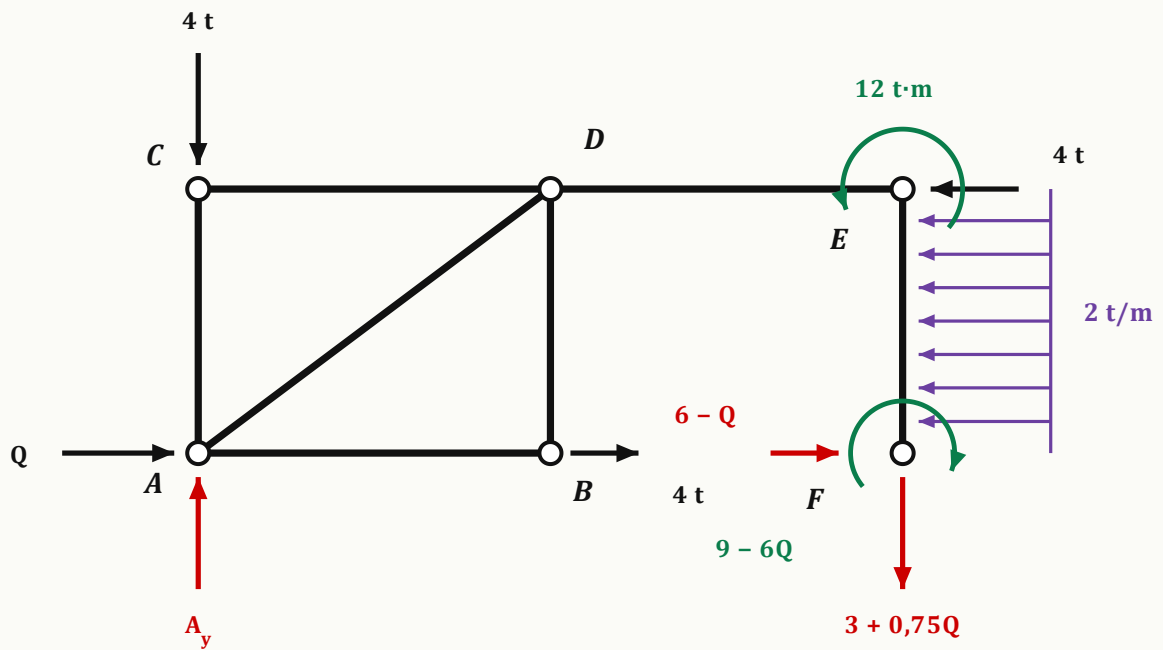
La estructura del enunciado, con la carga ficticia Q en A.

Te dan: $EI = 12600 \text{ t}\cdot\text{m}^2$ y $aE = 3150 \text{ t}$. Los miembros DE y EF llevan « l, a »; los miembros AC, CD, AD, AB y BD llevan « a » sola.

Las cargas son cinco, y conviene listarlas antes de empezar porque es fácil dejarse una: $4 \text{ t} \downarrow$ en C · $4 \text{ t} \rightarrow$ en B · $4 \text{ t} \leftarrow$ en E · un momento de $12 \text{ t}\cdot\text{m}$ antihorario en E · y una distribuida de 2 t/m hacia la izquierda sobre la columna EF.

A es un **rodillo**, así que puede moverse en horizontal y ahí no hay ninguna carga horizontal aplicada: ahí va la carga ficticia Q , exactamente igual que en el problema anterior. Lo que cambia por completo es el paso ②.

Por qué éste es el difícil: la estática global no alcanza



Cuerpo libre de toda la estructura, con todas las cargas y todas las reacciones.

Incógnitas de apoyo: A_y (rodillo) · F_x , F_y , M_F (empotramiento) = 4

Ecuaciones de equilibrio en el plano: = 3

NO ALCANZA.

Ojo con la conclusión que **no** hay que sacar de aquí. Cuatro incógnitas contra tres ecuaciones normalmente querría decir «hiperestática de primer grado». Pero **no lo es**: esta estructura sí se puede resolver por pura estática. La ecuación que falta existe, solo que no está en el contorno — **está adentro**.

El pasador en D

En D hay un **pasador**, o sea una articulación interna: un perno que une las dos partes y las deja **girar libremente** una respecto a la otra.

Y ahí está la ecuación que falta. Si las dos partes pueden girar libremente entre sí, entonces **el pasador no puede transmitir momento** — si lo transmitiera, obligaría a las dos partes a girar juntas, que es justo lo que no hace. Solo transmite **dos fuerzas**, una horizontal y una vertical.

Un pasador transmite: F_x ✓ F_y ✓ Momento X

Por lo tanto: $\Sigma M = 0$ en D, tomando solo lo que hay a UN lado del pasador.

Eso se llama una **condición de construcción**: una ecuación adicional que existe porque la estructura está construida de cierta manera. A esta clase de estructuras se les dice *isostáticas de conjunto*: globalmente parecen hiperestáticas, pero con las condiciones internas se resuelven completas.

LA REGLA PRÁCTICA

Siempre que veas un pasador, una rótula o una articulación interna en un enunciado, **ahí está tu ecuación extra**. Y la manera de usarla es **cortar por ahí** y hacer el cuerpo libre de un lado solo.

Qué es la «chapa»

El panel A-B-D-C tiene cuatro nudos y cinco barras (AC, CD, AD, AB y BD), y está **triangulado**. Comprobémoslo con la fórmula de armaduras:

$$G.D.H. = (b + r) - 2n = (5 + 3) - 2(4) = 0 \rightarrow \text{ISOSTÁTICA y estable}$$

$b = 5$ barras

$r = 3$ vínculos (A_y del rodillo + las 2 componentes del pasador D)

$n = 4$ nudos

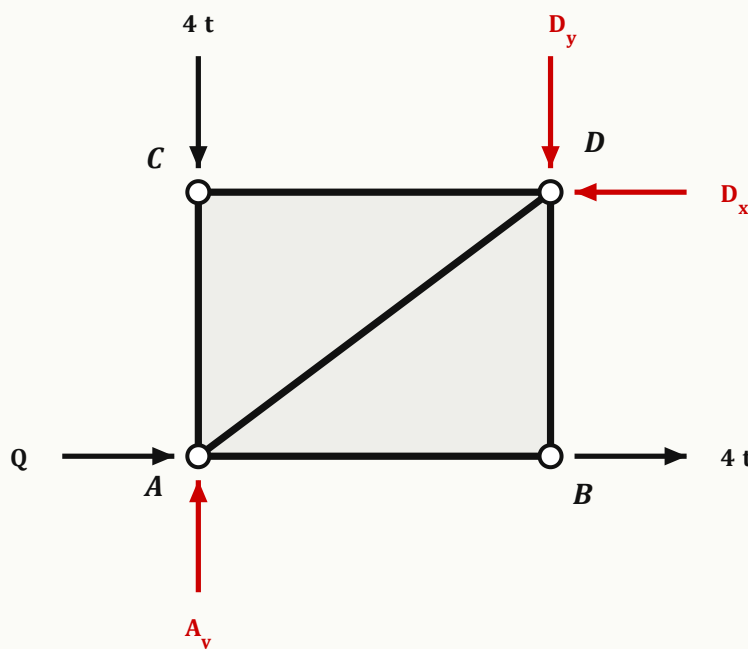
EL MATIZ QUE HAY QUE ENTENDER BIEN

Que sea una «chapa» significa que **para el equilibrio** se comporta como un cuerpo rígido: su forma no cambia y transmite las cargas como un bloque. Eso permite hacerle un único cuerpo libre en vez de ir nudo por nudo.

Pero sus barras SÍ se deforman axialmente — cada una lleva su «a» en la figura. Y esa deformación es exactamente lo que entra en Castigliano: la diagonal AD aporta ella sola el **58 %** del desplazamiento total. Rígida para la estática, deformable para la energía. Si alguien la tomara como indeformable perdería el aporte de AD y le daría 0,0073 m en vez de 0,0172 m.

Paso ② — Cuerpo libre de la chapa

¿Por qué empiezo por la chapa y no por el pórtico? Por la regla de siempre: **el cuerpo con menos incógnitas primero**. Sobre la chapa hay tres (A_y , D_x , D_y) y tres ecuaciones: se cierra sola. Sobre el pórtico hay cinco: no se puede empezar por ahí.



La chapa aislada. D_x y D_y son las incógnitas del pasador, dibujadas en el sentido supuesto.

Sobre la chapa actúan **seis fuerzas y nada más**: los 4 t ↓ en C, los 4 t → en B, la Q → en A, la reacción A_y ↑ en A, y las dos componentes del pasador en D. Ninguna otra carga del enunciado toca este cuerpo.

LOS DOS VÍNCULOS, Y POR QUÉ SON ASÍ

A es **RODILLO** → solo reacción vertical, **NO hay** A_x

(y por eso justamente A se mueve en horizontal, que es lo que se pide,

y por eso ahí es donde tiene sentido poner Q)

D es **PASADOR** → pasa 2 fuerzas y NINGÚN momento

Ahora tomo momentos **en D**. ¿Por qué precisamente ahí? Porque D_x y D_y están aplicadas en D, así que **tienen brazo cero** y desaparecen solas de la ecuación. Me queda una sola incógnita.

$\Sigma M_D = 0$ (antihorario positivo, D está en (4 ; 3)):

4 t ↓ en C → brazo horizontal 4 m → + 4(4) = **+16**

4 t → en B → brazo vertical 3 m → + 4(3) = **+12**

Q → en A → brazo vertical 3 m → **+ 3Q**

A_y ↑ en A → brazo horizontal 4 m → **- 4 A_y**

D_x , D_y en D → BRAZO CERO → **0**

$$16 + 12 + 3Q - 4A_y = 0 \rightarrow A_y = (28 + 3Q)/4 = 7 + 0,75 Q \uparrow$$

DE DÓNDE SALE CADA BRAZO

El **brazo** es la distancia perpendicular entre la línea de acción de la fuerza y el punto donde tomo momentos. Por eso una fuerza **vertical** se mide con la distancia **horizontal**, y una fuerza **horizontal** con la **vertical**. Es el error más común de toda la materia.

C está en (0;3) y D en (4;3): los separan 4 m en horizontal, y la carga en C es vertical → brazo 4. B está en (4;0) y D en (4;3): 3 m en vertical, y la carga en B es horizontal → brazo 3. A está en (0;0): para Q, que es horizontal, el brazo es la diferencia vertical, 3 m; para A_y , que es vertical, el brazo es la horizontal, 4 m.

Con A_y ya despejada, las otras dos ecuaciones dan el pasador completo:

$$\Sigma F_x = 0 \quad (\rightarrow \text{positivo}): \quad Q + 4 - D_x = 0 \quad \rightarrow \quad D_x = 4 + Q$$

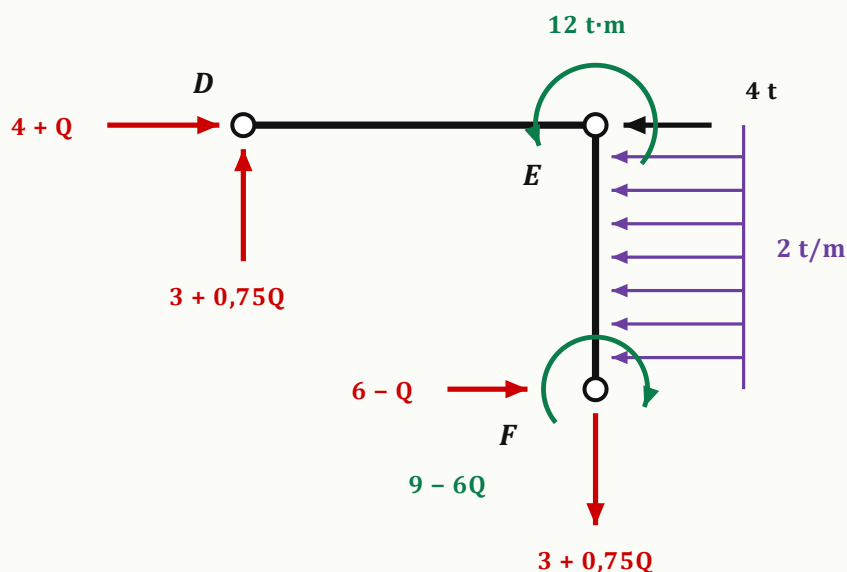
$$\Sigma F_y = 0 \quad (\uparrow \text{positivo}): \quad A_y - 4 - D_y = 0$$

$$(7 + 0,75Q) - 4 - D_y = 0 \quad \rightarrow \quad D_y = 3 + 0,75Q$$

Las dos salen positivas, lo que significa que el sentido que supuse en el dibujo era el correcto: sobre la chapa van $(4+Q) \leftarrow$ y $(3+0,75Q) \downarrow$.

Paso ② (cont.) — El otro lado del corte

Por acción y reacción, al pórtico le llega exactamente lo contrario de lo que le llegó a la chapa: **$(4+Q) \rightarrow$ y $(3+0,75Q) \uparrow$** . Con eso, el pórtico ya tiene solo tres incógnitas y se resuelve directo.



El pórtico D-E-F: el otro lado del corte, con lo mismo al revés en D.

$$\Sigma F_x = 0 : \quad (4+Q) - 4 - 6 + F_x = 0 \quad \rightarrow \quad F_x = 6 - Q \quad \rightarrow$$

$$\Sigma F_y = 0 : \quad (3 + 0,75Q) + F_y = 0 \quad \rightarrow \quad F_y = 3 + 0,75Q \quad \downarrow$$

$$\Sigma M_F = 0 : \quad M_F = 9 - 6Q \quad \text{horario}$$

(el -6 es la distribuida: $2 \text{ t/m} \times 3 \text{ m} = 6 \text{ t}$ hacia la izquierda)

Comprobación con $Q = 0$:

$$\Sigma F_x : 4 - 4 - 6 + 6 = 0 \quad \checkmark$$

$$\Sigma F_y : 7 - 4 - 3 = 0 \quad \checkmark$$

Paso ② (cont.) — Y todavía faltan los nudos

POR QUÉ LAS REACCIONES NO BASTAN

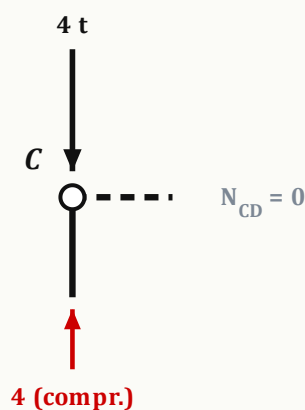
Ya tengo todas las reacciones, pero **eso no me sirve para Castigliano**. La fórmula suma **barra por barra**: necesito el N de *cada* barra, no el equilibrio global.

De toda la chapa, la única barra cuya fuerza **depende de Q** es la diagonal AD. Las demás tienen fuerzas constantes, así que su derivada es cero y no contribuyen — pero eso solo lo sé **después** de calcularlas. Por eso hay que bajar a los nudos.

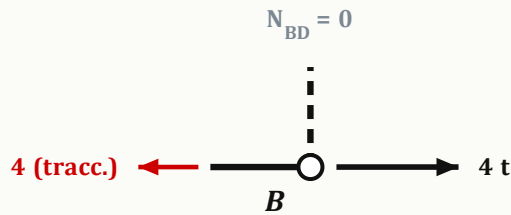
Nudo C $\Sigma F_x = 0 : N_{CD} = 0$ (BARRA NULA)
 $\Sigma F_y = 0 : -N_{CA} - 4 = 0 \rightarrow N_{CA} = -4 \text{ t}$ (COMPRESIÓN)

Nudo B $\Sigma F_y = 0 : N_{BD} = 0$ (BARRA NULA)
 $\Sigma F_x = 0 : -N_{BA} + 4 = 0 \rightarrow N_{BA} = +4 \text{ t}$ (TRACCIÓN)

El razonamiento es el mismo del nudo C del problema anterior: en cada uno de esos nudos solo concurren **dos barras perpendiculares entre sí**, y la carga aplicada está alineada con una de ellas. La ecuación en la dirección de la otra queda con un solo término, que por fuerza vale cero.



Barra CD — nula. El nudo C es lo que lo demuestra.



Barra BD — nula. El nudo B es lo que lo demuestra.

Y ahora sí, el nudo A, que es el que me interesa de verdad:

Nudo A Dirección AD: de A(0;0) a D(4;3) $\rightarrow (4;3)/5 = (0,8 ; 0,6)$
(triángulo 3-4-5, así que la barra mide exactamente 5 m)

$$\Sigma F_x = 0 : 0,8 \cdot N_{AD} + N_{AB} + Q = 0$$

$$0,8 \cdot N_{AD} + 4 + Q = 0$$

$$N_{AD} = -1,25 (4 + Q) \quad (\text{COMPRESIÓN})$$

$$\Sigma F_y = 0 : -4 + 0,6(-1,25)(4+Q) + A_y = 0$$

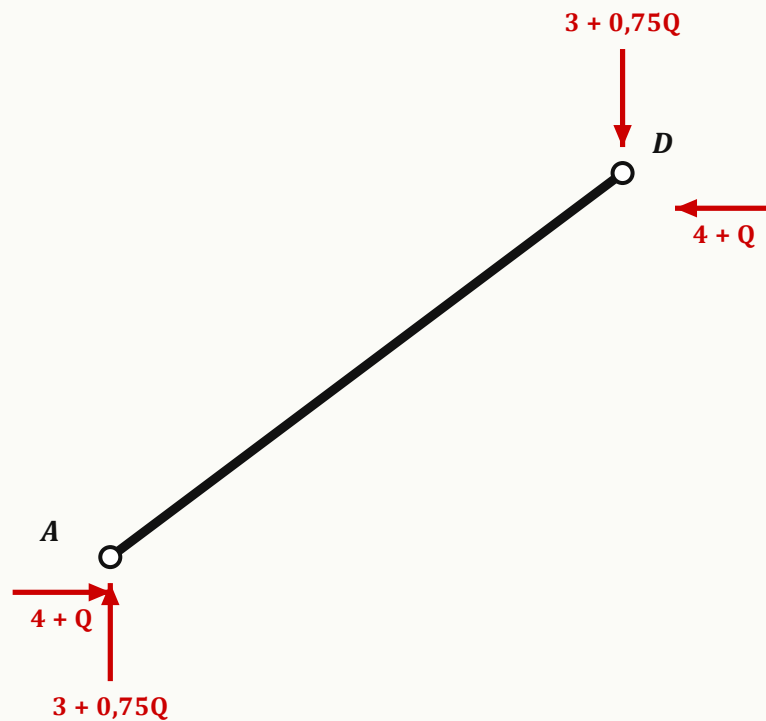
$$A_y = 7 + 0,75 Q \quad \uparrow$$

LA COMPROBACIÓN QUE TE SALVA EN LA DEFENSA

Mira lo que acaba de pasar: **A_y salió dos veces por caminos completamente distintos** — primero por ΣM_D sobre la chapa entera, y ahora por ΣF_y del nudo A. Y las dos veces dio **$7 + 0,75Q$** .

Eso no es redundancia inútil: es **la verificación de toda la estática**. Si tuvieras un error de signo en cualquier parte del camino, los dos resultados no coincidirían. Es la comprobación que hay que citar si te preguntan «¿cómo sabes que está bien?».

Paso ③ — Los despieces



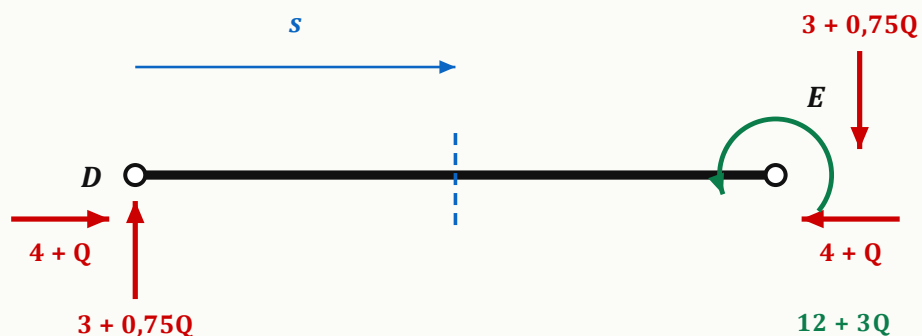
Barra AD — de dos fuerzas, comprimida. La única barra «a» que depende de Q.

Barra AD $N = - 1,25 (4 + Q)$ (COMPRESIÓN) $\partial N / \partial Q = - 1,25$ $L = 5 \text{ m}$
 Con $Q = 0$: $N = - 5 \text{ t}$

UN SIGNO QUE CONFUNDE A TODO EL MUNDO

La barra está **comprimida** (N negativo) y su derivada también es negativa. Al multiplicar: $(-5) \cdot (-1,25) \cdot 5 = +31,25$, positivo.

El signo del término **no depende** de si la barra está traccionada o comprimida, sino de si su fuerza **crece o decrece** con Q. Aquí, al empujar A hacia la derecha, AD se comprime **todavía más**, y por eso contribuye positivamente al desplazamiento.



Barra DE — la viga superior del pórtico.

Corte a una distancia s desde D, me quedo con el trozo de la izquierda.

Lo único que entra por ese lado es lo que pasa el pasador:

la vertical $(3 + 0,75Q) = 0,75(4 + Q)$, con brazo s → momento

la horizontal $(4 + Q)$, **colineal con DE** → solo axial

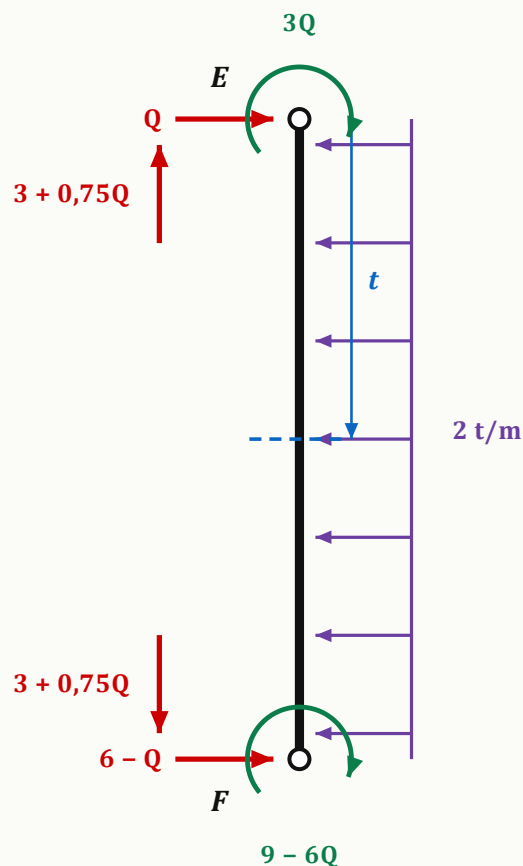
$$M = 0,75(4 + Q) \cdot s \quad \partial M / \partial Q = 0,75 s$$

$$N = - (4 + Q) \text{ (COMPRESIÓN)} \quad \partial N / \partial Q = -1 \quad L = 4 \text{ m}$$

LA COMPROBACIÓN DE ESTA BARRA

Evalúa M en el extremo, $s = 4 \text{ m}$: $M = 0,75(4 + Q)(4) = 12 + 3Q$, y con $Q = 0$ da **12 t·m** — que es **exactamente** el momento aplicado en E por el enunciado.

Eso cuadra el equilibrio del nudo E: el momento que la viga trae al llegar coincide con el momento externo que hay ahí. Si no coincidiera, tendrías un error de estática.



Barra EF — la columna empotrada en F. Es el despiece más difícil de los cuatro problemas.

Éste es el que más cuesta, así que vale la pena desmenuzarlo. Corto a una distancia t desde E hacia abajo y me quedo con el **trozo de arriba**. Lo que pasa en el nudo E es que las cargas aplicadas **se comen casi todo** lo que trae la viga DE, y a la columna solo le entra el residuo:

Qué llega al nudo E	Lo que trae DE	Lo aplicado en E	Lo que sobra y entra a EF
Fuerza horizontal	$(4 + Q)$	$4\ t \leftarrow$	Q
Momento	$12 + 3Q$	$12\ t \cdot m\ \curvearrowright$	$3Q$

Entonces, sobre el trozo de arriba de la columna:

- ① la distribuida sobre la longitud t : resultante $2t$ con brazo $t/2 \rightarrow t^2$
- ② el momento residual $3Q$, que entra por arriba $\rightarrow -3Q$
- ③ la fuerza residual Q , con brazo t hasta el corte $\rightarrow -Q \cdot t$

$$M = t^2 - 3Q - Qt = t^2 - Q(3 + t)$$

$$\partial M / \partial Q = - (3 + t)$$

$$N = 3 + 0,75Q = 0,75(4+Q) \quad (\text{TRACCIÓN}) \quad \partial N / \partial Q = 0,75 \quad L = 3 \text{ m}$$

Con $Q = 0$: $M = t^2$ ← queda limpiísima

POR QUÉ EL MOMENTO DE 12 T·M NO APARECE EN LA DERIVADA

Porque es una **carga real y constante**: no depende de Q , así que al derivar respecto a Q desaparece. Pero **sí** aparece al evaluar en $Q = 0$ — de hecho es lo que cancela el momento que trae DE y deja $M = t^2$, sin más.

Es la distinción central del método: **lo que se deriva** es solo lo que depende de Q ; **lo que se evalúa** es todo.

ÉSTA ES LA LECTURA FRÁGIL DEL PROBLEMA

Que el momento de 12 t·m sea **antihorario** es el único dato de los cuatro problemas que sale de **interpretar un dibujo**, no de calcular. Así está leído en la figura del enunciado y así se declaró en el trabajo.

Si fuera horario, ese momento ya no se cancelaría con el que trae DE sino que se sumaría, y el resultado pasaría a $\delta_A = 0,0429 \text{ m}$ en vez de 0,0172 m. **El método sería idéntico** — cambia solo el signo con el que ese término entra.



Barra AC — comprimida, pero su fuerza no depende de Q.



Barra AB — traccionada, y tampoco depende de Q.

Barra AC $N = -4 \text{ t}$ $\partial N / \partial Q = 0 \rightarrow$ NO CONTRIBUYE

Barra AB $N = + 4 \text{ t}$ $\partial N / \partial Q = 0 \rightarrow$ NO CONTRIBUYE

Pasos ④ y ⑤ — Evaluar y sumar

Barra	N (Q=0)	$\partial N / \partial Q$	L (m)	$N \cdot (\partial N / \partial Q) \cdot L$
AD	-5	-1,25	5	31,25
DE	-4	-1	4	16
EF	+3	0,75	3	6,75
AC · CD · AB · BD	—	0	—	0
Σ				54 t·m

$$\delta_{\text{axial}} = 54 / 3150 = 0,0171429 \text{ m}$$

Miembro	M(x)	$\partial M / \partial Q$	M con Q = 0	L	$\int M \cdot (\partial M / \partial Q) dx$
DE	$0,75(4+Q) \cdot s$	$0,75 s$	$3 s$	4	$\int_0^4 2,25 s^2 ds = +48$
EF	$t^2 - Q(3+t)$	$-(3+t)$	t^2	3	$-\int_0^3 (3t^2 + t^3) dt = -47,25$
Σ					0,75 t·m ³

$$\text{Barra DE: } \int_0^4 (3s)(0,75 s) ds = 2,25 \cdot (64/3) = +48$$

$$\begin{aligned} \text{Barra EF: } \int_0^3 (t^2) \cdot (-(3+t)) dt &= - [t^3 + t^4/4]_0^3 \\ &= - (27 + 20,25) = - 47,25 \end{aligned}$$

$$\Sigma = 48 - 47,25 = 0,75 \qquad \delta_{\text{flexión}} = 0,75 / 12600 = 0,0000595 \text{ m}$$

$$\delta_A = 0,0171429 + 0,0000595 = 0,017202 \text{ m} \approx 1,72 \text{ cm} \rightarrow$$

LO MÁS INTERESANTE DE ESTE PROBLEMA

Mira los dos aportes de flexión: DE da **+48** y EF da **-47,25**. Casi se cancelan, y la suma queda en 0,75 — un residuo del 1,5 % de lo que aporta cada uno.

El resultado es que la flexión pesa **0,35 %** del total y el axial **99,65 %**. El desplazamiento de A es, para efectos prácticos, **puramente axial**, y lo domina la diagonal AD con el 58 %.

Físicamente: cuando empujas A hacia la derecha, la viga DE y la columna EF giran en sentidos **contrarios** y sus energías de flexión casi se anulan entre sí. No es un error ni una casualidad: en los cuartos parciales de 2009 y 2014 del mismo profesor la flexión se anula **del todo** y la carga ficticia viaja solo por los axiales.

EL CRITERIO DE SIGNOS, QUE ES LO ÚNICO «RARO» QUE QUEDA

En cada barra escribo M con el sentido que sale de **su propio cuerpo libre**, y derivo $\partial M / \partial Q$ de **esa misma expresión**. Por eso el criterio puede ser distinto de una barra a otra sin ningún problema.

La razón es que si a una barra le invierto el criterio, **M y $\partial M / \partial Q$ cambian de signo a la vez**, y el producto $M \cdot (\partial M / \partial Q)$ queda exactamente igual:

$$(-M) \cdot (-\partial M / \partial Q) = M \cdot (\partial M / \partial Q) \quad \leftarrow \text{el producto es inmune}$$

Lo que **no** se puede hacer nunca es mezclar dos criterios **dentro de una misma barra**: ahí sí se rompe todo, porque el M y la derivada dejarían de corresponderse.

CIERRE

El patrón común de los dos

Si comparas los dos problemas lado a lado, se ve que la parte de energía es **idéntica** y que todo lo que cambia es la estática:

	Problema 2	Problema 3
¿Dónde va Q?	horizontal en D (rodillo)	horizontal en A (rodillo)
¿Por qué ahí?	no hay carga horizontal en ese punto	lo mismo
Estática	nudo por nudo, empezando por C	corte en el pasador D → chapa → pórtico → nudos
¿Qué la complica?	una diagonal a 45°	dos cuerpos y una condición interna
Barras con flexión	solo AB	DE y EF
Barras nulas	BC	CD y BD
No contribuyen ($\partial N / \partial Q = 0$)	CD y BC	AC, AB, CD y BD
Domina	empatan: 0,1244 vs 0,1249	el axial, 99,65 %
Resultado	0,2493 m →	0,0172 m →

LAS SEIS FRASES QUE RESUMEN LOS DOS PROBLEMAS

1. Si no hay carga donde quiero medir, la invento (Q) y la anulo al final.
2. Derivo PRIMERO, evalúo en $Q = 0$ DESPUÉS. Nunca al revés.
3. Barra de dos fuerzas = solo axial. La figura ya me lo dice con «a».
4. Empiezo por el cuerpo (o nudo) con menos incógnitas.
5. Tomo momentos donde más incógnitas tengan brazo cero.
6. Lo que suma es $N(\partial N / \partial Q)L$, no N. Si la fuerza no depende de Q, la barra no cuenta.

Entender los problemas 2 y 3 · Mecánica de Sólidos II · Misael Scarbay
 Las figuras son las mismas del trabajo entregado (22 despieces auditados).