

Simulacro de la defensa

127 preguntas con respuesta modelo · Cuarto Parcial · Mecánica de Sólidos II

Responde en voz alta **antes** de mirar. Tu progreso se guarda en este teléfono.

LO QUE REPORTAN LOS QUE YA DEFENDIERON

- «Está preguntando **teoría** como tal.»
- «Más que todo **Euler**, la **deficiencia**.»
- «Que por qué asumiste que aquí esto era de **tantos tramos**.»
- «Que por qué decidiste agarrar **esta inercia y no la otra**.»
- «A otro le preguntó por qué se usaba la **integral** en Castigliano.»
- **Agarra unas notas y te DIBUJA una variante:** a uno le puso una ménsula con carga distribuida sostenida por un **cable** — «en el ejercicio 1 dijiste que la deformación aquí es cero, ¿qué haces en este caso?». Se le fue por el **signo** al igualar la integral.
- «En el ejercicio 3, si él le colocaba una **carga a la mitad de una barra**, ¿qué pasaba?»
- Y también **cosas básicas**: «¿qué grado de hiperestaticidad tenía el ejercicio?»

Las **39 preguntas marcadas** ★ salen directo de ahí, y la categoría 🎲 **Variantes que dibuja** es la que te prepara para lo que se invente en el momento. Empieza por esas.

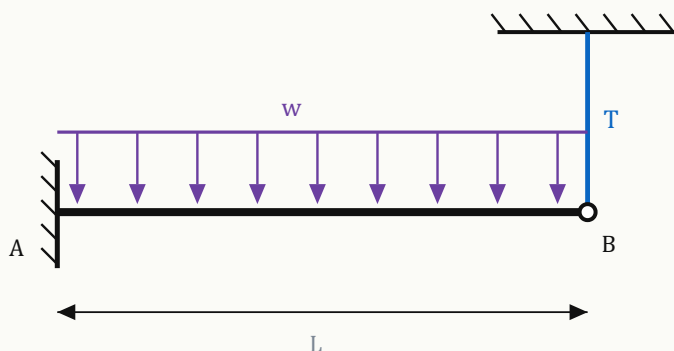
QUÉ PRACTICAR

CUÁNTAS POR RONDA

- ★ Le dibujo una ménsula con carga distribuida sostenida por un CABLE en el extremo. En el ejercicio 1 usted dijo que por Castigliano la deformación ahí es cero. ¿Qué hace en este caso?

CON ESTO ABRES

Ahí ya NO es cero: el cable se estira, así que el extremo baja exactamente lo que el cable se alarga.



La variante que dibujó: ménsula con carga repartida, sostenida en el extremo por un cable. **Ese apoyo no es rígido.**

Ésa es justamente la diferencia. En el Problema 1, B era un **rodillo rígido**: no cede, así que $\delta_B = 0$. Aquí el apoyo es un **cable elástico**: se estira bajo la tracción, así que **el extremo de la viga sí baja**, y baja **exactamente lo que el cable se alarga**.

La condición de compatibilidad pasa a ser:

$$\delta_B \text{ (hacia abajo)} = \text{alargamiento del cable} = T \cdot L_c / (A_c E_c)$$

Y aquí está la trampa del signo. Castigliano da el desplazamiento del punto **en la dirección de T**, y T tira de la viga hacia **arriba**. Pero el punto se mueve hacia **abajo**. Por eso el segundo miembro va **negativo**:

$$\partial U_{\text{viga}} / \partial T = - T \cdot L_c / (A_c E_c)$$

La forma de no equivocarse: en vez de eso, meto el cable **dentro** de la estructura y sumo su energía. Entonces el apoyo verdadero es el anclaje del techo, que sí es rígido, y vuelvo a Menabrea puro con cero:

$$U_{\text{total}} = U_{\text{viga}} + T^2 L_c / (2 A_c E_c) \quad \rightarrow \quad \partial U_{\text{total}} / \partial T = 0$$

Las dos formas son la misma ecuación, pero **ésta no tiene signo que equivocar**, porque el término del cable entra positivo por construcción.

★ En esa ménsula sostenida por un cable, desarrolle el cálculo: ¿cuánto vale la tracción T?

CON ESTO ABRES

$T = (wL^4/8EI) / (L^3/3EI + f)$, con $f = L_c/(A_c E_c)$ la flexibilidad del cable.

Estructura primaria: la ménsula empotrada, con w hacia abajo y la tracción T tirando hacia arriba en el extremo. Mido x **desde el extremo libre**:

$$M(x) = T \cdot x - w \cdot x^2 / 2 \quad \partial M / \partial T = x$$

$$\partial U_{\text{viga}} / \partial T = (1/EI) \int_0^L (Tx - wx^2/2)(x) dx = (1/EI) [TL^3/3 - wL^4/8]$$

Igualando a $-T \cdot f$, con $f = L_c/(A_c E_c)$:

$$TL^3/(3EI) - wL^4/(8EI) = -T \cdot f$$

$$T [L^3/(3EI) + f] = wL^4/(8EI)$$

$$T = (wL^4/8EI) / (L^3/3EI + f)$$

Fíjate en la estructura de esa fórmula: arriba **la flecha que tendría la ménsula sola**, abajo **la suma de las dos flexibilidades** — la de la viga y la del cable. Es el reparto clásico: cuanto más flexible el cable, menos carga toma.

- ▼ ★ Compruebe el resultado de la ménsula con cable en los casos extremos.

CON ESTO ABRES

Con cable rígido da $3wL/8$ — que es exactamente mi Tarea 4. Con cable flojo da 0: ménsula pura.

Ésta es la mejor manera de demostrar que la fórmula es correcta, y además conecta con lo que ya entregué:

Cable INFINITAMENTE RÍGIDO ($f \rightarrow 0$):

$$T = (wL^4/8EI) \cdot (3EI/L^3) = 3wL/8$$

← es EXACTAMENTE el voladizo apuntalado de mi Tarea 4

Cable INFINITAMENTE FLOJO ($f \rightarrow \infty$):

$T \rightarrow 0$ ← ménsula pura, el cable no aporta nada

O sea que **mi tarea es el caso límite de este problema** cuando el puntal es indeformable. Y entre esos dos extremos, el cable real toma una fracción de $3wL/8$ según su rigidez.

Una tercera comprobación: la flecha del extremo sale $\delta_B = wL^4/8EI - TL^3/3EI$, y sustituyendo T se verifica que es **exactamente $T \cdot f$** , el alargamiento del cable. La geometría cierra.

▼ ★ ¿Y si en vez de un cable fuera un resorte? ¿O si el apoyo se asentara?

CON ESTO ABRES

Es el mismo esquema: la condición deja de ser cero y pasa a ser la deformación de ese vínculo.

Es **el mismo esquema** en los tres casos. Lo único que cambia es el segundo miembro de la ecuación de compatibilidad:

apoyo RÍGIDO $\rightarrow \partial U / \partial R = 0$

CABLE $(L_c, A_c E_c)$ $\rightarrow \partial U / \partial R = - R \cdot L_c / (A_c E_c)$

RESORTE de rigidez k $\rightarrow \partial U / \partial R = - R / k$ (es lo mismo con $f = 1/k$)

apoyo que SE ASIENTA $\rightarrow \partial U / \partial R = - \delta_{\text{asent}}$ (un dato, no depende de R)

El signo siempre sale del mismo razonamiento: **Castigliano da el desplazamiento en la dirección de R** , y hay que comparar ese sentido con el sentido real en que el punto se mueve.

Y hay una diferencia importante en el último caso: con un asentamiento, **el resultado sí depende de EI** , porque ya no se puede cancelar al no estar igualado a cero. Por eso los asentamientos diferenciales son tan dañinos en estructuras rígidas.

- ▼ ★ Le pone una carga puntual a la mitad de una de las barras del problema 3. ¿Qué cambia?

CON ESTO ABRES

Depende de qué barra: si ya flectaba, hay que picarla en dos tramos; si era de dos fuerzas, DEJA DE SERLO.

Hay que separar dos casos, porque son muy distintos.

CASO 1 — la carga cae sobre DE o EF, que son las «l, a». Ésas ya flectan, así que el cambio es de forma: **M(x) cambia de expresión al pasar la carga**, así que hay que **picar la barra en dos tramos** e integrar por separado, exactamente como en el Problema 1.

$$0 \leq s \leq 2 : M = 0,75(4+Q) \cdot s$$

$$2 \leq s \leq 4 : M = 0,75(4+Q) \cdot s - P_0(s-2)$$

Y aquí está el detalle bonito: **$\partial M / \partial Q$ sigue siendo $0,75s$ en los DOS tramos**, porque el término $-P_0(s-2)$ **no contiene Q** y desaparece al derivar. Es **el mismo mecanismo** que en el Problema 1, donde $-P(x-2)$ se iba al derivar respecto a B_y . La integral pasa de $+48$ a $48 - 5P_0$.

CASO 2 — la carga cae sobre una barra de las «a» sola (AC, CD, AD, AB, BD). Aquí el cambio es **mucho más grave**, y no es solo picarla...

- ▼ ★ Si esa carga cae a la mitad de una barra de las que solo llevan «a» —una de dos fuerzas—, ¿qué pasa exactamente?

CON ESTO ABRES

Que la barra **DEJA DE SER** de dos fuerzas: empieza a flectar, y el enunciado ni siquiera da su inercia.

Una barra es de dos fuerzas porque está cargada **únicamente en sus dos extremos**. Poner una carga en el medio **rompe esa condición**: ahora hay **tres** fuerzas, y el equilibrio ya no obliga a que sean colineales con el eje.

Las consecuencias son en cadena:

- ① la barra desarrolla **FLEXIÓN y CORTANTE**, no solo axial
- ② deja de valer el **método de los nudos** para esa barra
- ③ haría falta su **momento de inercia**... que el enunciado NO da (solo dice «a»)
- ④ hay que picarla en dos tramos para integrar
- ⑤ y la estática de toda la chapa cambia

O sea que **el problema quedaría incompleto**: con el dato «a» solo, no se puede resolver. Habría que pedir la I de esa barra.

Ésa es la respuesta que demuestra que uno entendió *por qué* las barras de armadura solo tienen axial, en vez de aceptarlo como una regla. La condición no es que la barra sea recta ni que esté articulada: es que **no tenga carga entre los nudos**.

▼ ¿Y si le quito el pasador de D y suelda ese nudo?

CON ESTO ABRES

Pierdo la ecuación extra: pasa a ser hiperestática de primer grado y hay que usar Menabrea.

Se acaba la condición de construcción. El pasador era lo que aportaba la cuarta ecuación ($\Sigma M = 0$ a un lado del corte); si el nudo es rígido, **transmite momento** y esa ecuación desaparece.

4 incógnitas de apoyo (A_y, F_x, F_y, M_F) - 3 ecuaciones = **G.H. = 1**

Ya no se resuelve por estática pura. Habría que elegir una **redundante** — por ejemplo A_y , o el propio momento M_D que ahora se transmite — y aplicar **Menabrea**: $\partial U / \partial R = 0$.

Y sería bastante más largo, porque habría que escribir la energía de toda la estructura en función de esa redundante **antes** de poder meter la carga ficticia Q para el desplazamiento.

▼ ¿Y si cambio el rodillo de A por una articulación?

CON ESTO ABRES

Dos cosas: se vuelve hiperestática, y la pregunta del problema deja de tener sentido.

Cambian **dos** cosas, y la segunda es la interesante:

1. Se vuelve hiperestática. Aparece A_x , así que son 5 incógnitas de apoyo contra 3 ecuaciones más 1 del pasador: **G.H. = 1**. Habría que aplicar Menabrea.

2. La pregunta del enunciado se cae. Piden el desplazamiento **horizontal** de A, y una articulación **impide justamente ese desplazamiento**. La respuesta sería **cero**, sin calcular nada.

Y ahí se ve por qué el enunciado puso un rodillo: es **precisamente** lo que deja libre esa dirección y hace que la pregunta tenga sentido — y lo que permite colocar ahí la carga ficticia Q.

▼ ¿Y si le agrego una barra más a la armadura del problema 4?

CON ESTO ABRES

Pasa a ser hiperestática y el método de los nudos ya no basta: ahí sí haría falta Castigliano.

$$b + r = 14 + 3 = 17 \quad \text{contra} \quad 2n = 2(8) = 16 \quad \rightarrow \quad \text{G.H.} = 1$$

Con una barra de más el equilibrio ya no alcanza: **el método de los nudos deja de bastar**. Sobra una incógnita.

Habría que tomar una barra como **redundante**, cortarla imaginariamente, y aplicar la condición de que **el desplazamiento relativo entre los dos labios del corte es cero** — porque la barra es continua:

$$\partial U / \partial N_{\text{redundante}} = 0$$

Y ahí sí haría falta Castigliano en el Problema 4, cosa que en el original no hace falta. Interesante: es exactamente el mismo esquema del Problema 1, pero con una barra en vez de un apoyo.

- ▼ ¿Y si le QUITO una barra? Por ejemplo una de las nulas.

CON ESTO ABRES

Se vuelve un mecanismo. Una barra nula no es prescindible.

$$b + r = 12 + 3 = 15 \quad \text{contra} \quad 2n = 16 \quad \rightarrow \quad G.H. = -1 \quad \rightarrow \quad \text{MECANISMO}$$

Aunque BF no lleve ninguna fuerza en esta hipótesis de carga, **quitarla vuelve la estructura inestable**. Sin ella, el nudo B solo tendría AB y BC, que son colineales: nada le impediría moverse verticalmente.

Ésa es la respuesta a «si es nula, ¿para qué está?»: **una barra nula no es una barra inútil, es una barra descargada en esta combinación**. Aporta estabilidad geométrica y empieza a trabajar en cuanto la carga cambie — por ejemplo con viento, o si la carga se aplicara solo en medio vano.

- ▼ ¿Y si la viga del problema 1 tuviera EI distinto en cada tramo?

CON ESTO ABRES

Ya no se puede sacar como factor común: las reacciones sí dependerían de la relación de rigideces.

Cambiaría el paso clave. En el original, EI es constante, sale como **factor común** de las dos integrales y se cancela al igualar a cero — por eso las reacciones no dependen del material.

Con EI variable habría que meterlo **dentro** de cada integral:

$$\int M(\partial M / \partial B_y) dx / EI_1 + \int M(\partial M / \partial B_y) dx / EI_2 = 0$$

Y ahora **las reacciones SÍ dependerían de la relación EI_1/EI_2** . El tramo más rígido atraería más carga y más momento. Es el mismo principio por el que en un pórtico las columnas gruesas se llevan más momento que las delgadas.

Y ojo: también se perdería la simetría si los dos tramos tuvieran rigideces distintas, aunque la geometría y las cargas sí fueran simétricas.

▼ ¿Y si le pongo una rótula en el medio de la viga del problema 1?

CON ESTO ABRES

Se vuelve isostática: la rótula aporta la ecuación que faltaba y ya no hace falta Castigliano.

Una rótula interna aporta **una ecuación** ($\sum M = 0$ en ella, tomando un lado). Como la viga era hiperestática de primer grado:

$$G.H. = 1 - 1 = 0 \rightarrow \text{ISOSTÁTICA}$$

Se resolvería por **pura estática**, sin Castigliano, exactamente como hice con el pasador del Problema 3: cortar en la rótula y hacer el cuerpo libre de un lado.

Es la operación inversa de la anterior: **una liberación interna baja el grado de hiperestaticidad; un vínculo de más lo sube.**

▼ ¿Y si el cable estuviera inclinado en vez de vertical?

CON ESTO ABRES

Solo la componente vertical sostiene la viga, y aparece además una fuerza axial en ella.

Cambian dos cosas:

1. Solo la componente vertical sostiene. Si el cable forma un ángulo θ con la vertical, la que levanta el extremo es $T \cdot \cos \theta$, y ésta es la que entra en el momento flector. La componente horizontal $T \cdot \sin \theta$ produce **fuerza axial** en la viga, que habría que sumar a la energía si se pide precisión.

2. La flexibilidad efectiva empeora. El cable es más largo ($L_c / \cos \theta$) y solo aprovecha una fracción de su fuerza, así que el conjunto se vuelve más flexible y toma menos carga.

El esquema de la ecuación es el mismo; lo que cambia es que hay que **descomponer antes de plantear**, igual que hice con la diagonal BD del Problema 2.

▼ ¿Y si hubiera DOS cables en vez de uno?

CON ESTO ABRES

Serían dos redundantes: dos ecuaciones simultáneas, una por cada tracción.

Sería hiperestática de **segundo** grado, con dos redundantes T_1 y T_2 . La compatibilidad daría **dos ecuaciones simultáneas**:

$$\partial U / \partial T_1 = - T_1 \cdot f_1 \qquad \partial U / \partial T_2 = - T_2 \cdot f_2$$

(o, en la versión limpia, $\partial U_{\text{total}} / \partial T_1 = 0$ y $\partial U_{\text{total}} / \partial T_2 = 0$ metiendo la energía de los dos cables.)

Ojo con un detalle: al escribir $M(x)$ habría que **picar la viga en tres tramos**, porque cada cable introduce una discontinuidad de carga. Y las dos ecuaciones quedan acopladas, porque T_1 aparece en la ecuación de T_2 y viceversa: hay que resolver el sistema 2×2 .

▼ ¿Qué grado de hiperestaticidad tiene cada uno de sus cuatro problemas?

CON ESTO ABRES

P1 uno, P2 cero, P3 cero (isostática de conjunto), P4 cero. Y la tarea, uno.

P1 4 reacciones (A_x, A_y, B_y, C_y) - 3 ecuaciones = **G.H. = 1**
hiperestática de primer grado → hace falta 1 condición de compatibilidad

P2 ISOSTÁTICA. El subsistema B-C-D tiene 4 incógnitas (3 axiales + D_y) y 4 ecuaciones (nudos C y D); AB queda como ménsula. Se resolvió sin ninguna condición de compatibilidad - ésa es la prueba.

P3 4 incógnitas de apoyo - 3 ecuaciones = 1... **PERO** el pasador de D aporta una ecuación más ($\Sigma M = 0$ a un lado) → **G.H. = 0**, ISOSTÁTICA DE CONJUNTO.
La chapa por su lado: $(b+r) - 2n = (5+3) - 2(4) = 0$.

P4 $(b + r) - 2n = (13 + 3) - 2(8) = 16 - 16 = 0$, ISOSTÁTICA.

Tarea empotramiento (3) + puntal (1) - 3 = **G.H. = 1**

El error que hay que evitar: decir que el P3 es hiperestática porque el conteo de apoyos da

1. **El conteo global no basta cuando hay condiciones internas.** Ésa es justamente la gracia de ese problema.

▼ ¿Cuántas ecuaciones aporta cada cosa? Resuma.

CON ESTO ABRES

Cada nudo dos, cada cuerpo tres, y cada liberación interna una más.

APORTAN ECUACIONES

cuerpo rígido en el plano → 3 (ΣF_x , ΣF_y , ΣM)
nudo de armadura → 2 (ΣF_x , ΣF_y – ΣM se cumple sola)
rótula o pasador interno → +1 ($\Sigma M = 0$ a un lado)
rótula donde concurren n barras → $n-1$

APORTAN INCÓGNITAS

rodillo	→ 1	articulación	→ 2
empotramiento	→ 3	cada barra	→ 1 (su axial)

Y de ahí sale todo el conteo. La regla que resume: **un vínculo de más sube el grado de hiperestaticidad; una liberación interna lo baja.**

- ▼ En general, ¿cómo ataca cualquier variante que le dibujen?

CON ESTO ABRES

Cuatro preguntas en orden: qué tipo de apoyo, cuántas ecuaciones faltan, dónde va la condición y cuánto vale.

Siempre las mismas cuatro preguntas, en este orden:

1. ¿Ese vínculo es RÍGIDO o DEFORMABLE?

rígido $\rightarrow \delta = 0$ · cable/resorte $\rightarrow \delta =$ la deformación de ese vínculo

2. ¿Cuántas ecuaciones me faltan?

contar incógnitas contra ecuaciones, **incluyendo las liberaciones internas**

3. ¿Dónde va la condición de compatibilidad?

en el punto y la dirección de la redundante que elegí

4. ¿A cuánto la igualo, y con qué signo?

comparar el sentido supuesto de la redundante con el movimiento real del punto

Y el atajo que evita el error de signo en el paso 4: **meter el elemento deformable dentro de la energía** (cable, resorte) y volver a $\partial U_{\text{total}} / \partial R = 0$. Así el término entra positivo por construcción y no hay nada que equivocarse.

▼ ¿Y si le aplico la carga distribuida solo en medio tramo de la viga del problema 1?

CON ESTO ABRES

Se pierde la simetría y hay que integrar la viga completa, con un tramo más por cada discontinuidad.

Se caen las dos simplificaciones que usé:

1. Se pierde la simetría. Ya no se puede decir $A_y = C_y$: habría que arrastrar las dos incógnitas y usar ΣM además de ΣF_y .

2. Hay que integrar la viga completa, no media, y con un tramo adicional por cada discontinuidad — donde **empieza** y donde **termina** la carga repartida.

El método es idéntico: sigue siendo hiperestática de primer grado, sigue valiendo $\partial U / \partial B_y = 0$. Solo que el álgebra crece bastante.

Y el resultado ya no sería $5P/16$ y $11P/8$: esas fórmulas valen **solo** para la carga simétrica del enunciado.

▼ ★ ¿Cuál es la deficiencia de la fórmula de Euler?

CON ESTO ABRES

Que solo vale mientras el material siga elástico — y en mis barras no lo hace.

La fórmula de Euler se deduce suponiendo que el material sigue la **ley de Hooke**: en toda la deducción aparece **E**, que es la pendiente de la zona **elástica** del diagrama tensión–deformación. Por lo tanto la fórmula solo es válida mientras $\sigma_{cr} \leq \sigma_{proporcional} \approx \sigma_y$.

Fuera de ese rango la fórmula **sigue dando números, pero son físicamente imposibles**. En mi caso, la barra HE tiene $\lambda = 5000/65 = 76,92$ y Euler predice $\sigma_{cr} = \pi^2(200\,000)/76,92^2 = \mathbf{333,6\,MPa}$, cuando el acero cede a **250**. La barra habría fluido mucho antes de llegar a esa tensión, así que **nunca alcanza la carga de pandeo elástico**.

Ésa es la deficiencia: **Euler sobreestima la capacidad de las columnas cortas e intermedias**. Por eso el enunciado indica usar σ_y como valor máximo de la tensión crítica, y por eso en mis cuatro barras comprimidas usé el tope de 250 MPa y no el valor de Euler.

- ▼ ★ Aparte de la elasticidad, ¿qué otras hipótesis tiene Euler? ¿Se cumplen en la realidad?

CON ESTO ABRES

Cinco, y en la realidad ninguna se cumple del todo — por eso el factor de seguridad es alto.

Euler supone que la columna es: **(1)** perfectamente recta, **(2)** de material homogéneo e isótropo, **(3)** cargada exactamente en el centroide, **(4)** sin tensiones residuales, y **(5)** con extremos idealmente articulados y sin rozamiento. Más la de comportamiento elástico lineal.

En una columna real **ninguna se cumple del todo**: sale del taller con una curvatura inicial de milímetros, la carga llega con alguna excentricidad, y el laminado en caliente deja **tensiones residuales** que hacen que parte de la sección plastifique antes de tiempo.

Por eso la carga de pandeo real de una columna de taller es **siempre menor** que la teórica de Euler, y por eso el factor de seguridad contra pandeo es más alto que el de cedencia. El FS no cubre solo la incertidumbre de la carga: cubre **la distancia entre el modelo y la pieza real**.

▼ ★ ¿Por qué en la fórmula de Euler no aparece σ y ?

CON ESTO ABRES

Porque el pandeo elástico es un problema de rigidez, no de resistencia.

En $P_{cr} = \pi^2 EI / L_e^2$ solo aparecen **E** (rigidez del material), **I** (forma de la sección) y **L_e** (longitud efectiva). La resistencia del material no interviene, porque el pandeo no es una falla del material: es una **pérdida de estabilidad de la forma**. El material puede estar trabajando al 20 % de su capacidad y la columna se arquea igual.

La consecuencia práctica, que es lo interesante: **poner acero de alta resistencia en una columna esbelta no sirve absolutamente de nada**. Un acero A36 y uno A572 tienen prácticamente el mismo E (200 GPa), así que pandean con la misma carga. Para mejorar una columna esbelta hay que darle **más inercia** o **acortarla** — nunca más resistencia.

Ahora bien: σ_y sí entra **como tope**, porque marca hasta dónde vale la fórmula. Eso es distinto de aparecer dentro de ella.

▼ ★ ¿Qué es el pandeo y en qué se diferencia de la cedencia?

CON ESTO ABRES

La cedencia es falla de resistencia; el pandeo es falla de estabilidad.

Cuando una pieza **cede**, la tensión alcanzó el límite del material: comparas σ contra σ_y . Es un problema de **resistencia**, es progresivo y **avisa** — el acero fluye, se deforma visiblemente y redistribuye esfuerzos.

Cuando una pieza **pandea**, el material ni se enteró: la tensión puede estar muy por debajo de σ_y . Lo que falló es la **forma** — la posición recta dejó de ser estable. Es un problema de **estabilidad**, es **súbito** y no avisa.

La imagen que lo fija: una bola en el fondo de un valle, si la empujas **vuelve** — equilibrio estable. La misma bola en la cima de una loma, si la empujas **se va** — equilibrio inestable. Una columna comprimida está en el valle mientras la carga sea baja, y existe una carga exacta a la que pasa a la cima: la **carga crítica**.

▼ ★ Deduzca o justifique de dónde sale $\sigma_{cr} = \pi^2 E / \lambda^2$.

CON ESTO ABRES

Es P_{cr} de Euler dividida entre el área, usando $r^2 = I/A$.

Se parte de la carga crítica de Euler para una columna biarticulada:

$$P_{cr} = \pi^2 E I / L_e^2$$

Para pasarla a tensión se divide entre el área:

$$\sigma_{cr} = P_{cr}/A = \pi^2 E I / (A \cdot L_e^2)$$

Y ahora se usa la definición del **radio de giro**, $r = \sqrt{I/A}$, o sea $I = A \cdot r^2$:

$$\begin{aligned}\sigma_{cr} &= \pi^2 E (A r^2) / (A L_e^2) = \pi^2 E r^2 / L_e^2 \\ &= \pi^2 E / (L_e/r)^2 = \pi^2 E / \lambda^2\end{aligned}$$

La ventaja de escribirla así es que **toda la geometría queda resumida en un solo número**, la esbeltez λ , y la fórmula se puede graficar de una vez para cualquier perfil.

▼ ★ ¿Qué es el radio de giro? ¿Qué mide físicamente?

CON ESTO ABRES

$r = \sqrt{I/A}$: mide qué tan lejos del eje está repartida el área.

Se define $r = \sqrt{I/A}$. Físicamente es **la distancia a la que habría que concentrar toda el área para que diera la misma inercia**. Mide, entonces, qué tan **repartida** está la sección respecto a un eje.

Dos perfiles con la **misma área** pueden tener r muy distintos: en un tubo el material está todo lejos del eje, así que r es grande y cuesta mucho doblarlo; en una platina delgada el material está pegado al eje débil y r es chiquito.

En el W250×80: $r_x = 111$ mm (eje fuerte, el material del alma y las alas está lejos) y $r_y = 65$ mm (eje débil). Casi la mitad — por eso importa tanto cuál se use.

▼ ★ ¿Qué es la esbeltez y por qué es el número que decide todo?

CON ESTO ABRES

$\lambda = L_e/r$, y σ_{cr} cae con el **CUADRADO** de λ .

$\lambda = L_e/r$ compara **lo larga** que es la columna contra **lo gruesa** que es su sección respecto al eje que la va a hacer fallar. Es adimensional.

Lo determinante es que $\sigma_{cr} = \pi^2 E / \lambda^2$ cae con el **cuadrado**:

duplicar la longitud $\rightarrow \lambda$ se duplica $\rightarrow \sigma_{cr}$ cae a la **CUARTA PARTE**

Por eso una columna esbelta es tan desfavorable, y por eso arriostrarla (reducir L_e) es tan eficaz — *cuando está en zona de Euler*. En mi problema no lo está, y por eso arriostrar no serviría de nada.

▼ ★ ¿Cuál es la esbeltez límite y cuánto vale en su problema?

CON ESTO ABRES

La frontera está en 88,9 (o 125,7 según AISC); mis barras están en 46, 62 y 77 — todas por debajo.

La esbeltez frontera es aquella en la que Euler predice exactamente la cedencia:

$$\pi^2 E / \lambda^2 = \sigma_y \rightarrow \lambda = \pi \sqrt{E / \sigma_y} = \pi \sqrt{(200\,000 / 250)} = \mathbf{88,9}$$

El criterio del AISC-ASD usa una frontera todavía más alta, $\lambda_c = \sqrt{(2\pi^2 E / \sigma_y)} = \mathbf{125,7}$, que es donde Euler predice $\sigma_y/2$. Es más conservadora porque las tensiones residuales hacen que el comportamiento inelástico empiece antes de llegar a σ_y .

Mis cuatro barras comprimidas tienen $\lambda = 46,15 \cdot 61,54 \cdot 76,92 \cdot 76,92$. **Todas están por debajo de las dos fronteras**, con cualquiera de los dos criterios. Ninguna está en zona de Euler.

- ▼ ★ Entonces, si todas se topan y , ¿qué diferencia hay entre el criterio de pandeo y el de cedencia en σ ?

CON ESTO ABRES

Solo el factor de seguridad: 3 contra 1,75.

Ninguna otra. Los dos criterios arrancan del **mismo** 250 MPa; lo único que los distingue es el factor de seguridad que les aplica el enunciado:

$$\text{límite de pandeo} = \sigma_y \cdot A / 3 = 850 \text{ kN}$$

$$\text{límite de cedencia} = \sigma_y \cdot A / 1,75 = 1457 \text{ kN}$$

$$\text{razón} = 1,75/3 = \mathbf{0,583} < \mathbf{1} \rightarrow \text{el pandeo es SIEMPRE más estricto}$$

Y eso lo puedo demostrar **en general**, no comprobarlo caso por caso: con el mismo tope y con $FS_{\text{pandeo}} > FS_{\text{cedencia}}$, verificar la cedencia de un miembro comprimido es **redundante** en este problema.

Ahora bien, eso es una **conclusión**, no un supuesto de partida: si el FS de pandeo hubiera sido menor que el de cedencia, se invertiría. Por eso escribí las tres restricciones y señalé cuál rige, en vez de saltarme una.

▼ ★ ¿Por qué el factor de seguridad contra pandeo es mayor que el de cedencia?

CON ESTO ABRES

Porque el pandeo es súbito, no avisa, y es hipersensible a las imperfecciones.

Por dos razones que se suman:

1. La consecuencia es peor. La cedencia es una falla **dúctil**: el acero fluye, se deforma visiblemente, redistribuye esfuerzos hacia zonas menos cargadas y da tiempo de reaccionar. El pandeo es una **inestabilidad**: la barra pasa de recta a arqueada de golpe, sin aviso, y arrastra a la estructura.

2. La predicción es menos confiable. σ_y es un dato medido en ensayo y muy repetible. La carga de pandeo, en cambio, depende de imperfecciones que **no se pueden medir** en cada pieza: curvatura inicial, excentricidad del nudo, tensiones residuales de laminación, desalineación de montaje. Todas **reducen** la capacidad respecto a la teórica.

Predicción menos confiable + consecuencia peor = **más margen**. De ahí el 3 contra el 1,75.

▼ ¿Qué es la longitud efectiva y qué valor de K usó?

CON ESTO ABRES

K = 1, extremos articulados, que es la hipótesis propia de una armadura ideal.

$L_e = K \cdot L$ es la longitud de una columna **biarticulada equivalente** que pandearía con la misma carga. K depende de cómo estén sujetos los extremos:

biarticulada	$K = 1,0$	(el caso de Euler puro)
empotrada-libre	$K = 2,0$	(la peor: el doble de longitud efectiva)
empotrada-empotrada	$K = 0,5$	(la mejor)
empotrada-articulada	$K = 0,7$	

Usé **K = 1** porque una armadura ideal tiene los nudos de **pasador**: no transmiten momento, así que los extremos de cada barra pueden girar libremente. Es exactamente el caso de Euler.

Y además es la elección **conservadora**: si los nudos fueran soldados y rígidos, K bajaría a 0,7–0,8 y la barra resistiría más. Al suponer $K = 1$ me quedo del lado seguro.

▼ ★ ¿Por qué usó el radio de giro mínimo?

CON ESTO ABRES

Porque una columna pandea siempre por su eje de menor inercia — el eje débil.

Porque la columna va a pandear por el camino que menos se lo impida, y ése es el **eje de menor inercia**. El menor r da la **mayor** esbeltez, y la mayor esbeltez da la **menor** tensión crítica. La columna elige su punto débil.

con $r_y = 65 \text{ mm} \rightarrow \lambda = 5000/65 = 76,92 \leftarrow \text{la que manda}$

con $r_x = 111 \text{ mm} \rightarrow \lambda = 5000/111 = 45,05$

Usar r_x daría una esbeltez casi la mitad y una capacidad mucho mayor: sería quedarse **del lado inseguro**. Es un error grave de diseño, no un detalle.

Es el mismo razonamiento por el que una regla de plástico siempre se arquea por su cara ancha y nunca por el canto.

▼ ¿Y si la barra estuviera arriostrada lateralmente?

CON ESTO ABRES

Habría que comparar las dos esbelteces, cada una con su longitud libre, y quedarse con la mayor.

Cambiaría el planteamiento. Habría que calcular **dos** esbelteces distintas y quedarse con la mayor:

$$\lambda_x = L_{\text{total}} / r_x \quad (\text{en el plano donde NO hay arriostre})$$
$$\lambda_y = L_{\text{entre arriostres}} / r_y \quad (\text{en el plano arriostrado})$$

Un diseño eficiente busca justamente que las dos queden **iguales**: ahí el perfil está aprovechado al máximo en los dos planos.

Como el enunciado no menciona arriostramiento, se toma el caso más desfavorable: r_y con la longitud completa. Y en este problema, además, arriostrar **no serviría de nada**, porque las barras ya están topadas en σ_y : bajar λ no sube σ_{cr} .

▼ ¿Qué se usa cuando la columna NO está en zona de Euler?

CON ESTO ABRES

El tope en σ_y que manda el enunciado, o fórmulas empíricas: parábola de Johnson, curvas AISC.

Hay tres caminos, de más simple a más elaborado:

1. Topar en σ_y — es lo que indica este enunciado. Simple y conservador para columnas cortas, aunque optimista para las intermedias.

2. Parábola de Johnson — empalma con Euler en λ_c con tangente común: $\sigma_{cr} = \sigma_y[1 - (\lambda/\lambda_c)^2/2]$. Reconoce que en el rango intermedio la capacidad ya está degradada aunque no se llegue a σ_y .

3. Curvas del AISC / Eurocódigo — expresiones calibradas con ensayos que incorporan imperfección inicial y tensiones residuales. Es lo que se usa en proyecto real.

Yo apliqué el primero porque el enunciado lo pide explícitamente: «*usar la tensión de cedencia como valor máximo de la tensión crítica*».

▼ ¿Qué es el pandeo inelástico?

CON ESTO ABRES

El de las columnas intermedias: pandean con parte de la sección ya plastificada.

Es el que ocurre en el rango **intermedio** de esbelteces, entre la columna corta que simplemente cede y la esbelta que sigue a Euler. Ahí la columna pandea, pero cuando ya hay **parte de la sección plastificada**.

El culpable son las **tensiones residuales** del laminado en caliente: las puntas de las alas se enfrían primero y quedan comprimidas, así que al cargar la columna esas zonas alcanzan σ_y **antes** que el resto. La parte plastificada deja de aportar rigidez, la sección efectiva se reduce, y la columna pandea con una carga menor que la de Euler.

Por eso los códigos usan un módulo tangente en vez de E , o directamente curvas empíricas, y por eso el λ_c del AISC (125,7) está por encima del cruce teórico (88,9).

▼ ¿Qué barras revisó a pandeo y por qué solo esas?

CON ESTO ABRES

Solo las comprimidas: FG, GH, CG, AF y HE. Las traccionadas no pandean.

Solo las cinco comprimidas: FG y GH ($-7,5P$), CG ($-3P$), AF ($-8,75P$) y HE ($-12,5P$).

Una barra traccionada **no puede pandear**. El pandeo es una inestabilidad de compresión: la barra se arquea porque la carga la empuja hacia afuera de su eje. La tracción hace lo contrario — **endereza** la barra y la estabiliza. Un cable tenso no pandea por más largo que sea.

Por eso la columna de «tracción / compresión» en la tabla no es decorativa: es la que decide qué criterio le aplica a cada miembro.

▼ ¿Por qué HE y no AF, si las dos miden 5 m?

CON ESTO ABRES

Porque HE lleva más fuerza: 12,5P contra 8,75P.

Las dos tienen la misma longitud, la misma esbeltez (76,92) y por lo tanto el **mismo** $P_{adm} = 850 \text{ kN}$. Con capacidad idéntica, el límite lo pone la que lleva más carga:

$$\text{HE : } 12,5 P \leq 850 \rightarrow P \leq \mathbf{68,00 \text{ kN}} \leftarrow \text{rige}$$

$$\text{AF : } 8,75 P \leq 850 \rightarrow P \leq 97,14 \text{ kN}$$

Y HE lleva más porque está del lado del apoyo E, que recibe la reacción mayor ($10P$), y arranca del nudo H, donde cuelga la carga más grande. Su fuerza es literalmente $10P/0,8 = 12,5P$: la carga del nudo dividida entre el seno de la diagonal.

- ▼ ★ ¿Y por qué no rige FG, que es la más corta y por tanto la menos esbelta?

CON ESTO ABRES

Porque en este problema la longitud NO influye: las cuatro se topan en σ_y y tienen el mismo P_{adm} .

Ésta es la consecuencia más contraintuitiva del problema, y vale la pena decirla con claridad.

FG es menos esbelta ($\lambda = 46,15$ contra $76,92$), **pero eso no la ayuda en nada**: como las cuatro barras comprimidas están por debajo de la esbeltez frontera, **las cuatro se topan en el mismo $\sigma_y = 250$ MPa**, y por lo tanto tienen exactamente la misma capacidad:

$$P_{cr} = 250 \times 10\,200 = 2550 \text{ kN} \quad \text{y} \quad P_{adm} = 850 \text{ kN} \quad \rightarrow \quad \text{igual para las cuatro}$$

En este problema la longitud de la barra no cambia nada. Manda simplemente la que lleva más fuerza, que es HE. Si alguna barra hubiera quedado por encima de $\lambda = 89$, ahí sí la longitud habría entrado a competir.

- ▼ ¿Qué pasaría si HE midiera 10 m en vez de 5?

CON ESTO ABRES

Entraría en zona de Euler y P bajaría a un tercio: unos 22,7 kN.

$$\lambda = 10\,000/65 = 153,8 \quad \rightarrow \quad \text{ya supera la frontera (89 o 125,7)}$$

$$\sigma_{cr} = \pi^2(200\,000)/153,8^2 = 83,4 \text{ MPa} \quad (\text{mucho menor que } 250)$$

$$P_{cr} = 83,4 \times 10\,200 = 851 \text{ kN} \quad \rightarrow \quad P_{adm} = 284 \text{ kN}$$

$$12,5 P \leq 284 \quad \rightarrow \quad P \approx 22,7 \text{ kN}$$

Un tercio de lo actual. Y ahí sí la longitud sería el factor determinante, y arristrar la barra en el punto medio sería la solución más eficiente: bajaría λ a 76,9 y devolvería el tope de σ_y .

- ▼ ¿El pandeo puede ocurrir en una viga, no solo en una columna?

CON ESTO ABRES

Sí: pandeo lateral-torsional del ala comprimida, y abolladura del alma.

Sí. En una viga flectada, el **ala comprimida** se comporta como una columna: si no está arriostrada, puede desplazarse lateralmente y hacer girar la sección. Eso es el **pandeo lateral-torsional**, y es el que gobierna el diseño de muchas vigas de acero.

También existe la **abolladura** local del alma o del ala (pandeo local de placas), que es por lo que los perfiles tienen límites de esbeltez de sus elementos y por lo que se ponen rigidizadores.

En este problema no aplica porque la armadura es ideal: todas las barras son de dos fuerzas y no hay flexión en ninguna.

- ▼ Si tuviera que aumentar la capacidad de la armadura, ¿qué haría?

CON ESTO ABRES

Cambiar solo la barra HE por un perfil de mayor área. Arriostrarla no serviría de nada.

Cambiaría **únicamente la barra HE** por un perfil de mayor área, porque es la única que rige. Sustituir las trece sería un desperdicio: CH, BF y DH no llevan nada y CG solo 3P.

Y como está topada en σ_y , la capacidad crece **proporcional al área**: doblar el área dobla P. No hace falta buscar más inercia.

Lo que **no** serviría es arriostrarla en el punto medio: eso baja λ , pero σ_{cr} ya está topada en 250 y no puede subir. Es una consecuencia directa de que ninguna barra esté en zona de Euler, y suele ser buena pregunta para ver si uno entendió.

- ▼ ★ ¿Por qué en Castigliano aparece una integral? ¿De dónde sale?

CON ESTO ABRES

Sale de derivar la energía de deformación, que es la suma de la energía de cada trocito de viga.

La integral no se «introduce»: es el resultado de derivar la energía.

Paso 1 — la energía de una viga. Corto un trocito de largo dx . Sobre él actúa un momento M y el trocito se dobla un ángulo $d\theta = (M/EI)dx$. La energía guardada en ese trocito es $\frac{1}{2} \cdot M \cdot d\theta = M^2/(2EI)dx$. Para tener la de toda la viga hay que **sumar todos los trocitos**, y eso es una integral:

$$U = \int M^2/(2EI) \, dx$$

Paso 2 — derivar. Castigliano dice $\delta = \partial U / \partial P$. Los límites de integración son la geometría de la viga y **no dependen de P**, así que la derivada entra dentro de la integral. Y adentro, por regla de la cadena:

$$\partial/\partial P [M^2/(2EI)] = (1/2EI) \cdot 2 \cdot M \cdot (\partial M/\partial P) = M(\partial M/\partial P)/EI$$

$$\delta = \int M (\partial M/\partial P) \, dx / EI$$

O sea: **la integral está ahí porque M varía a lo largo de la viga**. Si M fuera constante, no haría falta.

▼ ★ ¿Por qué en la fórmula final no aparece el $\frac{1}{2}$ que sí está en la energía?

CON ESTO ABRES

Porque el 2 que baja de la potencia al derivar se cancela con el 2 del denominador.

La energía es $U = \int M^2/(2EI)dx$, con su $\frac{1}{2}$. Al derivar respecto a P se aplica la regla de la cadena sobre M^2 :

$$\partial(M^2)/\partial P = 2 \cdot M \cdot (\partial M/\partial P)$$

Ese 2 que baja de la potencia se cancela exactamente con el 2 del denominador:

$$(1/2EI) \cdot 2 M (\partial M/\partial P) = M(\partial M/\partial P)/EI$$

Por eso la fórmula de trabajo no lleva $\frac{1}{2}$ y la de energía sí. Es un error clásico arrastrarlo, y daría la mitad del desplazamiento correcto.

▼ ★ ¿Por qué puede meter la derivada dentro de la integral?

CON ESTO ABRES

Porque los límites de integración son la geometría de la viga y no dependen de la carga.

Por la regla de Leibniz: se puede intercambiar derivada e integral cuando **los límites de integración no dependen de la variable respecto a la que se deriva**.

Aquí los límites son 0 y L — la longitud de la barra, que es un dato geométrico fijo. Cargar más o menos **no cambia la longitud de la viga** (estamos en pequeñas deformaciones), así que la condición se cumple.

Si la geometría cambiara apreciablemente con la carga — grandes desplazamientos — esto ya no sería válido, y todo el método de Castigliano dejaría de aplicarse tal como lo usamos.

▼ ★ ¿Por qué en la armadura del problema 4 no hay integrales, y en el 2 y el 3 sí?

CON ESTO ABRES

Porque en una barra de armadura N es constante, así que la integral se vuelve un producto.

La energía axial de una barra es $U = \int N^2/(2AE)dx$. En una barra de armadura de sección constante, **N no varía a lo largo de la barra**: es el mismo valor de un extremo al otro, porque es una barra de dos fuerzas. Entonces la integral es trivial:

$$\int_0^L N^2/(2AE) dx = N^2 L/(2AE) \rightarrow \text{al derivar: } N(\partial N/\partial P)L/(AE)$$

Un simple producto. En cambio el **momento flector sí varía** con x — típicamente lineal o cuadráticamente —, así que ahí la integral no se puede evitar.

La regla general: se integra cuando la solicitación varía; se multiplica cuando es constante. Por eso los problemas 2 y 3 tienen las dos cosas: producto para las barras de dos fuerzas e integral para los miembros que flectan.

▼ ★ ¿Por qué dividió la integral en tramos? ¿Por qué ese número de tramos y no otro?

CON ESTO ABRES

Porque $M(x)$ cambia de expresión en cada punto donde hay una discontinuidad de carga.

Porque una integral necesita **una sola expresión continua** del integrando. Y $M(x)$ cambia de fórmula cada vez que aparece una discontinuidad de carga. Los cortes obligatorios son:

- donde hay una **carga puntual**
- donde hay un **momento concentrado**
- donde **empieza o termina** una carga distribuida
- en cada **apoyo** intermedio
- donde cambia la **sección** (EI distinto)

En el Problema 1 corté en 2 tramos **por media viga**: uno antes de la carga P (0 a 2 m) y otro después (2 a 4 m). La carga puntual a los 2 m es lo que obliga al corte — antes de ella el momento es $A_y \cdot x$ y después es $A_y \cdot x - P(x-2)$, que es otra función.

No es una elección arbitraria ni un número que uno escoge: **el número de tramos lo fija el enunciado**, contando las discontinuidades. Si pusiera menos, estaría integrando una función equivocada en parte del recorrido; si pusiera más, solo estaría partiendo sin necesidad — daría lo mismo, pero con más trabajo.

▼ ¿Y por qué en el Problema 2 le bastó UNA sola integral en la barra AB?

CON ESTO ABRES

Porque en esa barra no hay ninguna discontinuidad: la distribuida es continua y no hay cargas intermedias.

Porque en los 4 m de AB no ocurre nada que rompa la expresión de M: la carga repartida de 2 t/m es **continua en toda la barra** y no hay ninguna carga puntual ni momento aplicado en el medio. Toda la carga que entra lo hace por el nudo B, que es el extremo desde donde mido x.

$$M = (4+Q) \cdot x + x^2 \quad \text{válida de } x = 0 \text{ a } x = 4, \text{ sin cortes}$$

Por eso una sola integral de 0 a 4 basta. Es la comprobación de que uno leyó bien la estructura: si hubiera habido una carga puntual a mitad de AB, habrían hecho falta dos.

▼ ¿Cómo eligió dónde poner el origen de x y hacia dónde medirlo?

CON ESTO ABRES

Por el lado del corte con menos fuerzas, para escribir la ecuación más corta.

El origen se elige por **conveniencia**, no hay uno correcto. Los dos criterios son:

1. Quedarme con el lado del corte que tenga menos fuerzas. En la barra AB del Problema 2 medí x desde B, porque por ese lado solo entran las dos componentes de la diagonal; desde A habría tenido que arrastrar las tres reacciones del empotramiento.

2. Que las derivadas queden simples. En el Problema 1 medí x desde A porque así $\partial M / \partial B_y = -x/2$ en los **dos** tramos, lo que me deja sacarla como factor común y simplificar la ecuación entera.

Lo importante es que **una vez elegido, el criterio se mantiene dentro de esa barra**: los límites de la integral tienen que ser coherentes con el origen que fijé.

▼ ¿Qué representa físicamente $\partial M/\partial P$?

CON ESTO ABRES

Una sensibilidad: cuánto cambia el momento en ese punto si la carga aumenta una unidad.

Es una **sensibilidad**: cuánto varía el momento flector en la sección x cuando la carga P crece una unidad. Sus unidades son **longitud** ($\text{kN}\cdot\text{m}$ dividido entre kN), lo cual es una comprobación útil — si te da otra cosa, hay un error.

Y tiene una interpretación mucho más concreta: **$\partial M/\partial P$ es exactamente el diagrama de momentos que produciría una carga unitaria aplicada en el punto y la dirección de P .**

Se comprueba en el Problema 1: $\partial M/\partial B_y = -x/2$. Si le pongo 1 kN hacia arriba en el centro de la viga simplemente apoyada de 8 m, las reacciones son 0,5 kN hacia abajo en cada extremo y $M(x) = -0,5x = -x/2$. **Idéntico**. Por eso Castigliano y el método de la carga unitaria dan siempre lo mismo: son la misma integral $\int M\cdot m/EI \, dx$ con otra notación.

▼ ¿Qué significa que la integral dé cero en el problema 1? ¿Que M es cero?

CON ESTO ABRES

No. Significa que las áreas positiva y negativa del producto se cancelan exactamente.

No, M no es cero casi en ningún punto: vale $+25 \text{ kN}\cdot\text{m}$ bajo la carga y $-30 \text{ kN}\cdot\text{m}$ sobre el apoyo. Lo que da cero es **la integral del producto** $M \cdot (\partial M / \partial B_y)$.

El primer tramo aporta **$-16,67$** y el segundo **$+16,67$** : se cancelan exactamente. Y eso solo ocurre con $B_y = 55 \text{ kN}$. Lo comprobé metiendo otros valores:

$B_y = 40 \rightarrow \text{suma} = -80$ (negativo: B se hundiría)

$B_y = 55 \rightarrow \text{suma} = 0$ (B no se mueve – correcto)

$B_y = 60 \rightarrow \text{suma} = +80/3$ (positivo: B subiría)

Ésa es la prueba de que **la integral no es un artificio**: es literalmente el desplazamiento de B dividido entre EI. Le metes un valor equivocado y te dice hacia dónde se movería el punto.

▼ Escriba las expresiones de la energía de deformación.

CON ESTO ABRES

Cuatro, y todas tienen la misma forma: esfuerzo al cuadrado sobre dos veces la rigidez.

Axial: $U = \int N^2/(2AE) dx \rightarrow$ en barras: $\Sigma N^2 L/(2AE)$

Flexión: $U = \int M^2/(2EI) dx$

Cortante: $U = \int f \cdot V^2/(2GA) dx$ ($f = 1,2$ en sección rectangular)

Torsión: $U = \int T^2/(2GJ) dx$

Todas tienen la misma estructura: **el esfuerzo al cuadrado, dividido entre dos veces la rigidez correspondiente**. Y todas salen del mismo triángulo $\frac{1}{2} \cdot \text{esfuerzo} \cdot \text{deformación}$, porque en material elástico lineal la carga crece desde cero junto con la deformación.

Al derivar respecto a una carga P quedan:

$$\delta = \Sigma N(\partial N/\partial P)L/(AE) + \int M(\partial M/\partial P)dx/EI + \dots$$

▼ ¿Por qué la energía lleva un $\frac{1}{2}$? ¿No es trabajo = fuerza $\times$ distancia?

CON ESTO ABRES

Porque la fuerza no vale P todo el tiempo: crece desde cero. El trabajo es el área del triángulo.

Porque la fuerza **no es constante durante el proceso de carga**. Cuando empiezas a cargar, la fuerza vale cero y el resorte no se ha estirado; ambos crecen juntos y solo **al final** la fuerza vale P. Entonces no se puede multiplicar P por δ .

Hay que sumar fuerza $\times$ distancia a lo largo de todo el recorrido, o sea calcular el **área bajo la gráfica fuerza–desplazamiento**. Como el material es elástico lineal, esa gráfica es una recta y el área es un **triángulo**: $\frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot P$.

Ese $\frac{1}{2}$ es la firma del comportamiento elástico lineal, y por eso aparece en todas las fórmulas de energía. En cambio, una carga que **ya estaba puesta** y es arrastrada por un desplazamiento posterior hace un trabajo **completo**, sin $\frac{1}{2}$ — y ése es justamente el truco con el que se demuestra el teorema de Castigliano.

▼ ★ ¿Por qué decidió tomar esa inercia y no la otra?

CON ESTO ABRES

Depende de para qué: para pandeo, la MENOR; para flexión, la del eje que flecta.

Son dos decisiones distintas y conviene separarlas:

Para el pandeo (Problema 4): tomé $I_y = 43,1 \times 10^6 \text{ mm}^4$, la **menor**, y su radio de giro $r_y = 65 \text{ mm}$. Porque una columna pandea por el **eje de menor inercia**: es el que ofrece menos resistencia a curvarse, da la mayor esbeltez y la menor tensión crítica. Tomar I_x daría $\lambda = 45$ en vez de 77 y una capacidad muy superior — quedaría **del lado inseguro**.

Para la flexión (Problemas 1, 2 y 3): ahí no elijo yo: es la inercia respecto al eje **perpendicular al plano de flexión**, la que corresponde a cómo está cargada la pieza. Y en esos problemas el enunciado ya me da directamente el producto EI , así que ni siquiera hay que separar E de I .

La regla que resume las dos: **en pandeo la columna elige su punto débil, en flexión lo elige la dirección de la carga.**

▼ ★ ¿Por qué asumió que la viga era de esos tramos y no de otros?

CON ESTO ABRES

No lo asumí: el número de tramos lo fijan las discontinuidades de carga.

No es una suposición mía, es una consecuencia de la carga. Una integral necesita **una sola expresión continua** de $M(x)$, y el momento cambia de fórmula en cada discontinuidad: carga puntual, momento concentrado, inicio o fin de una distribuida, apoyo intermedio, o cambio de sección.

En el Problema 1, sobre media viga, hay **una** discontinuidad: la carga P a los 2 m. Por eso son **dos** tramos:

$$0 \leq x \leq 2 : M_1 = A_y \cdot x \quad (\text{antes de la carga})$$

$$2 \leq x \leq 4 : M_2 = A_y \cdot x - P(x-2) \quad (\text{después de la carga})$$

Y son **media** viga y no la viga entera porque aproveché la simetría: la mitad derecha es idéntica, así que integro la izquierda y multiplico por 2. Sin simetría serían cuatro tramos y el resultado sería exactamente el mismo, solo con más álgebra.

▼ ★ ¿Por qué eligió B_y como redundante y no otra reacción?

CON ESTO ABRES

Porque el enunciado lo pide, y porque deja una viga isostática estable y aprovecha la simetría.

Tres razones, en ese orden:

1. Lo pide el enunciado explícitamente.

2. Al quitarla queda una estructura isostática y estable: una viga simplemente apoyada de 8 m. Ése es el único requisito real para elegir una redundante — que lo que quede no sea un mecanismo. Si quitara A_x , por ejemplo, la viga quedaría libre de deslizar horizontalmente y no serviría.

3. Aprovecha la simetría. B_y está justo en el eje de simetría, así que puedo escribir $A_y = C_y = P - B_y/2$ e integrar media viga. Si eligiera A_y como redundante, la incógnita quedaría fuera del eje, perdería la simetría y tendría que integrar los cuatro tramos.

El resultado final es el mismo con cualquier elección válida: 12,5 y 55 kN.

▼ ★ ¿Por qué la condición es que ese desplazamiento valga cero?

CON ESTO ABRES

Porque en B hay un apoyo rígido: físicamente ese punto no puede moverse.

Porque la estructura es hiperestática y a la estática le falta una ecuación. Y la ecuación que falta **no es de equilibrio: es de compatibilidad**, o sea de geometría de la deformación.

El razonamiento es: hay **infinitas** combinaciones de reacciones que equilibran — (12,5·55·12,5) equilibra, pero (20·40·20) también y (0·80·0) también. **El equilibrio no puede distinguirlas** porque no sabe nada de cómo se deforma la viga. Lo que las distingue es que **solo una** produce una deformada que efectivamente pasa por donde está el apoyo B.

Y Castigliano me dice que $\partial U / \partial B_y$ es el desplazamiento vertical de B. Si una cosa es otra, y esa otra vale cero por la condición del apoyo, entonces la derivada vale cero. Ahí no hay ningún paso oculto.

▼ ★ ¿Por qué inventó una carga que no existe?

CON ESTO ABRES

Porque Castigliano solo da el desplazamiento donde hay una carga, y en D no había ninguna horizontal.

Por una restricción del propio teorema: $\partial U / \partial P$ da el desplazamiento del punto donde P está aplicada, medido en la dirección de P. Ni en otro punto ni en otra dirección.

Me piden el desplazamiento horizontal de D, y en D no hay ninguna carga horizontal aplicada. Entonces **no existe la variable respecto a la cual derivar**: el problema, tal como está planteado, no se puede ni escribir.

Por eso agrego una carga ficticia Q en ese punto y esa dirección, resuelvo con ella dentro, derivo respecto a ella, y **al final la anulo** para que la estructura vuelva a ser la real. Es legítimo porque el material es elástico lineal y vale superposición: al hacer $Q = 0$ no queda ningún rastro de la carga inventada.

Pensándolo como una **sonda**: preguntar $\partial U / \partial Q$ es preguntar «si empujara un poquito en D, ¿cuánta energía extra guardaría la estructura?». Y la respuesta es proporcional a cuánto se deja empujar ese punto.

▼ ★ ¿Por qué despreció la energía de cortante?

CON ESTO ABRES

Porque su aporte es de orden $(h/L)^2$ frente a la flexión, y además el enunciado lo indica.

Por dos razones que se refuerzan:

1. Porque el enunciado lo dice. En los problemas 2 y 3 se indica literalmente «considerar únicamente las deformaciones por flexión y por fuerza axial». Ahí la decisión viene dada.

2. Porque es despreciable en piezas esbeltas. El aporte del cortante a la energía es del orden de $(h/L)^2$ respecto al de flexión, donde h es el canto y L la luz. En una viga con $L/h > 10$ eso es menos del 1 %.

Cuándo **sí** habría que incluirlo: en vigas cortas y peraltadas ($L/h < 5$), en vigas de alma delgada, y en vigas de gran canto tipo muro. Ahí se usa $U = \int f \cdot V^2 / (2GA) dx$, con $f = 1,2$ para sección rectangular y $f \approx A/A_{\text{alma}}$ para perfiles I .

En el Problema 1, además, **el axial es idénticamente nulo** — no es que lo desprecie, es que no existe: no hay cargas horizontales y $A_x = 0$.

▼ ★ ¿Por qué decidió cortar la estructura del problema 3 en el punto D?

CON ESTO ABRES

Porque ahí hay un pasador, y un pasador no transmite momento: ésa es la ecuación que faltaba.

Porque contando incógnitas de apoyo no alcanzaba: A_y del rodillo más F_x , F_y y M_F del empotramiento son **4 contra 3** ecuaciones de equilibrio global.

Pero eso **no** quiere decir que sea hiperestática. La ecuación que falta existe, solo que no está en el contorno: **está adentro**, en el pasador de D.

Un pasador es una articulación interna que deja **girar libremente** a las dos partes una respecto a la otra. Y si pueden girar libremente entre sí, **no puede transmitir momento** — si lo transmitiera, las obligaría a girar juntas. Transmite solo dos fuerzas. Por lo tanto:

$$\Sigma M = 0 \text{ en D, tomando solo lo que hay a UN lado del pasador}$$

Eso es una **condición de construcción**. A estas estructuras se les dice *isostáticas de conjunto*: globalmente parecen hiperestáticas, pero con las condiciones internas se resuelven completas por estática.

▼ ¿Por qué tomó momentos precisamente en D y no en otro punto?

CON ESTO ABRES

Porque ahí las dos incógnitas del pasador tienen brazo cero y desaparecen solas.

Porque D_x y D_y están aplicadas **en D**: su brazo respecto a ese punto es cero y se van solas de la ecuación. Me queda **una sola incógnita**, A_y , que sale despejada de un tirón.

Es la regla general de la estática: **tomar momentos en el punto donde concurra el mayor número de incógnitas**. Si tomara momentos en A tendría dos incógnitas en la misma ecuación y necesitaría resolver un sistema.

Lo mismo hice en el Problema 4: tomé ΣM_A porque ahí concurren A_x y A_y , y la ecuación quedó con E_y sola.

▼ ¿Por qué empezó por ese nudo y no por otro?

CON ESTO ABRES

Porque es el único con dos incógnitas: dos ecuaciones, dos incógnitas, se resuelve solo.

Porque cada nudo da **solo dos ecuaciones** (ΣF_x y ΣF_y ; ΣM se cumple sola porque todas las fuerzas concurren en un punto). Por lo tanto un nudo solo se puede resolver si tiene **como máximo dos barras de fuerza desconocida**.

En el Problema 2 empecé por el **nudo C**, donde solo llegan dos barras (CB y CD) más una carga conocida. En el Problema 4 empecé por **A** y **E**, que son los únicos con dos barras y con la reacción ya calculada.

Y desde ahí se avanza: cada nudo resuelto convierte incógnitas en datos y habilita el siguiente.

▼ Dentro de un nudo, ¿por qué planteó primero ΣF_y y no ΣF_x ?

CON ESTO ABRES

Para que la primera ecuación quede con una sola incógnita y no tener que resolver un sistema.

Por conveniencia algebraica, y ahorra bastante. En el nudo A del Problema 4 concurren AB (horizontal) y AF (diagonal). Como AB **no tiene componente vertical**, no aparece en ΣF_y :

$$\Sigma F_y : 0,8 \cdot N_{AF} + 7P = 0 \quad \rightarrow \text{una sola incógnita, sale directo}$$

$$\Sigma F_x : N_{AB} + 0,6(-8,75P) = 0 \quad \rightarrow \text{ahora también queda una sola}$$

Si hubiera empezado por ΣF_x , tendría dos incógnitas en la misma ecuación y habría que resolver un sistema de 2×2 .

La regla: empieza por la ecuación en la que no aparezca alguna de las barras. Si hay una barra horizontal, empieza por la vertical, y al revés.

▼ ¿Por qué supuso todas las barras a tracción?

CON ESTO ABRES

Para no tener que adivinar: el signo del resultado me lo dice, y la acción-reacción sale sola.

Porque antes de calcular **no sé** si una barra está traccionada o comprimida, y adivinar es una fuente de errores. Suponiendo siempre tracción, el signo del resultado me lo informa: si sale negativo, está comprimida, y **no hay que rehacer nada**.

Pero la razón de fondo es otra: **la acción y reacción sale automáticamente**. Con este convenio, cada barra tiene **un solo número** que vale para sus dos extremos; en cada nudo solo multiplico por el vector unitario que sale de ese nudo, y los signos se acomodan solos. Si dibujara el sentido «real» en cada nudo, tendría que acordarme de voltear la flecha a mano en el otro extremo, y ahí es donde de verdad se rompe la gente.

Y además es lo que necesita Castigliano, que suma $N \cdot (\partial N / \partial Q) \cdot L$ **con el signo de N**.

▼ ¿Por qué en el problema 2 solo consideré flexión en la barra AB?

CON ESTO ABRES

Porque es la única con «l» en la figura, y las otras tres son barras de dos fuerzas.

Por dos razones que coinciden:

1. Lo dice la figura. La convención del enunciado es que un miembro rotulado «**l**, **a**» se deforma por flexión y por axial, y uno rotulado «**a**» sola, únicamente por axial. AB lleva «l, a»; BC, CD y BD llevan «a». Sin momento de inercia declarado no hay término de flexión que calcular.

2. Lo confirma la física. Esas tres son **barras de dos fuerzas**: articuladas en ambos extremos y sin carga entre nudos. El equilibrio de un cuerpo bajo solo dos fuerzas exige que sean colineales con el eje, así que ni siquiera pueden desarrollar flector.

Leer bien esas etiquetas al principio ahorra la mitad del trabajo.

▼ ¿Por qué escribió el momento con ese criterio de signos y no con el contrario?

CON ESTO ABRES

Porque el producto $M \cdot (\partial M / \partial Q)$ es inmune a invertir el criterio, mientras no se mezcle dentro de una barra.

En cada barra escribo M con el sentido que sale de **su propio cuerpo libre**, y derivó $\partial M / \partial Q$ de **esa misma expresión**. El criterio puede ser distinto de una barra a otra sin ningún problema, y la razón es algebraica:

$$(-M) \cdot (-\partial M / \partial Q) = M \cdot (\partial M / \partial Q) \quad \leftarrow \text{el producto no cambia}$$

Si le invierto el criterio a una barra, **M y su derivada cambian de signo a la vez**, y el integrando queda igual. Por eso el resultado no depende de esa elección.

Lo que **no** se puede hacer nunca es mezclar dos criterios **dentro de una misma barra**: ahí M y $\partial M / \partial Q$ dejarían de corresponderse y el producto saldría mal. Ésa es la única disciplina que hay que respetar, y por eso lo declararé explícitamente en el trabajo.

▼ ¿Por qué chequeó la cedencia también en un miembro comprimido?

CON ESTO ABRES

Porque el enunciado dice «falla por cedencia», no «por tracción», y la cedencia es del material.

Porque la cedencia es una propiedad del **material**: el acero fluye a 250 MPa lo estires o lo aplastes. El enunciado dice «falla por cedencia», no «por tracción», así que le aplica a cualquier miembro que alcance σ_y .

Un miembro comprimido tiene **dos** maneras de fallar — ceder o pandear — y en principio hay que revisarle las dos. Por eso escribí las tres restricciones:

```
cedencia / máxima tracción (7,5P) →  $P \leq 194,29 \text{ kN}$   
cedencia / máxima compresión (12,5P) →  $P \leq 116,57 \text{ kN}$   
pandeo / máxima compresión (12,5P) →  $P \leq 68,00 \text{ kN} \leftarrow \text{rige}$ 
```

Resultó que la segunda sobra, porque el pandeo la tapa. Pero **eso es una conclusión, no un supuesto de partida**: si el FS de pandeo hubiera sido menor que el de cedencia, se invertiría. Presentar las tres no cuesta nada y demuestra que se entendió cuál rige y por qué.

▼ ¿Por qué usó σ_y como tope de la tensión crítica?

CON ESTO ABRES

Porque lo pide el enunciado, y porque Euler daría un valor imposible.

Primero, porque el enunciado lo indica literalmente: «usar la tensión de cedencia como valor máximo de la tensión crítica».

Y segundo, porque **tiene que ser así**: con $\lambda = 76,92$ Euler predice 333,6 MPa, cuando el acero cede a 250. Ese valor es físicamente inalcanzable — la barra fluye antes. Dejarlo sería diseñar con una capacidad que la pieza **no tiene**.

El enunciado, en el fondo, está pidiendo que uno reconozca la **deficiencia de Euler**: que la fórmula solo vale en el rango elástico y que fuera de él hay que topar.

▼ ¿Por qué aprovechó la simetría? ¿Qué habría pasado si no?

CON ESTO ABRES

Ahorra la mitad de la integración. Sin ella el resultado es el mismo, solo con más álgebra.

Porque hay simetría **completa**: geométrica (dos tramos de 4 m, apoyos iguales en los extremos) y de carga (una P en el centro de cada tramo). Si la estructura y la carga son simétricas respecto a un eje, **la respuesta también lo es**.

De ahí salen dos ahorros: $A_y = C_y$ sin calcular nada, y la integración de media viga multiplicada por 2 en vez de cuatro tramos.

Sin usarla el resultado sería **exactamente el mismo** — la simetría es una herramienta de ahorro, no un supuesto que cambie la física. Solo que tendría cuatro tramos y una incógnita más que despejar.

Ojo: para poder usarla tienen que ser simétricas **las dos cosas**. Si las cargas no lo fueran, aunque la viga sí, no valdría.

▼ ¿Por qué modeló la armadura con nudos articulados si en la realidad van soldados?

CON ESTO ABRES

Porque es la hipótesis clásica y es conservadora: los momentos secundarios son pequeños.

Es la hipótesis clásica de armadura, y se justifica porque los ejes de todas las barras **concurren en un punto** en cada nudo. Con eso, aunque el nudo sea soldado, los momentos que aparecen (llamados **secundarios**) son pequeños comparados con los axiales.

Y es **conservadora en pandeo**: un nudo rígido restringiría el giro y bajaría K por debajo de 1, aumentando la capacidad. Al suponer articulado y $K = 1$ me quedo del lado seguro.

Cuándo dejaría de valer: si las cargas se aplicaran **entre nudos** (ahí sí habría flexión real y las barras dejarían de ser de dos fuerzas), o si los ejes no concurrieran en un punto, lo que introduce excentricidades.

▼ ¿Por qué se quedó con ese lado del corte y no con el otro?

CON ESTO ABRES

Con el que tenga menos fuerzas: la ecuación sale más corta y con menos oportunidades de error.

Es indistinto para el resultado — los dos lados dan el mismo momento, porque la barra está en equilibrio. Se elige por **economía**: el lado con menos fuerzas.

En la barra AB del Problema 2 me quedé con el trozo de la **derecha** (el del nudo B), porque por ahí solo entran las dos componentes de la diagonal. Desde el lado de A habría tenido que arrastrar las tres reacciones del empotramiento, que ni siquiera había calculado todavía.

En la barra DE del Problema 3, con el trozo de la **izquierda**, solo entra lo que pasa el pasador: dos fuerzas. Desde el otro lado tendría las cargas de E más el empotramiento en F.

La regla: **corta y quédate con el lado donde ya sabes todo.**

▼ ¿Por qué la componente axial de una fuerza no produce momento en su propia barra?

CON ESTO ABRES

Porque es colineal con el eje: su brazo respecto a cualquier punto del eje es cero.

Porque el momento es fuerza por **brazo perpendicular**, y una fuerza colineal con el eje de la barra tiene su línea de acción pasando por **todos** los puntos de ese eje. El brazo respecto a cualquier corte es **cero**.

Esa componente produce el **axial** N, no flexión. Por eso en la barra AB del Problema 2, de las dos componentes que llegan por B, la **horizontal** $(4+Q)$ da el axial y la **vertical** $(4+Q)$ da el momento $(4+Q) \cdot x$.

Y en la barra DE del Problema 3 pasa lo mismo: la horizontal es colineal con DE y no da momento; solo la vertical, $0,75(4+Q)$, con brazo s .

▼ ¿Por qué el brazo de la carga distribuida es $x/2$ y no x ?

CON ESTO ABRES

Porque la resultante se aplica en el centroide del tramo cargado.

Porque la resultante de una carga uniformemente repartida se aplica en el **centroide** del área de carga. Si la carga cubre una longitud x desde el corte, el centroide está a **$x/2$** .

$$\text{resultante} = w \cdot x \quad \cdot \quad \text{brazo} = x/2 \quad \rightarrow \quad \text{momento} = w \cdot x^2/2$$

En la barra AB del Problema 2, con $w = 2 \text{ t/m}$: $2x \cdot (x/2) = \mathbf{x^2}$. En la columna EF del Problema 3, con la misma w : $\mathbf{t^2}$.

Ese **término cuadrático es la firma de una distribuida uniforme**. Si viera un x^3 en un momento, sabría que la carga es triangular.

▼ ¿Por qué no incluyó la energía de torsión?

CON ESTO ABRES

Porque todas las estructuras son planas y cargadas en su plano: no hay torsión.

Porque las cuatro estructuras son **planas y están cargadas en su propio plano**. En esas condiciones no se desarrolla torsión: no hay ninguna componente de momento perpendicular al plano de la estructura.

La torsión aparecería si hubiera cargas fuera del plano (una viga de balcón cargada excéntricamente, un pórtico espacial, un eje con poleas), y su energía sería $U = \int T^2/(2GJ)dx$, con G el módulo de corte y J la constante torsional.

▼ ¿Por qué eligió ese punto para tomar momentos en el problema 4?

CON ESTO ABRES

ΣM en A, porque ahí concurren dos de las tres reacciones y desaparecen.

Tomé $\Sigma M_A = 0$ porque en A hay un **pasador**, o sea que ahí concurren **dos** de las tres incógnitas de reacción: A_x y A_y . Las dos tienen brazo cero respecto a A y se van solas.

Queda una ecuación con **una sola incógnita**, E_y , que sale despejada de un tirón. Después ΣF_y da A_y y ΣF_x da $A_x = 0$.

Si hubiera tomado momentos en E, saldría A_y primero y luego E_y — también funciona. Lo que **no** conviene es tomar momentos en un punto donde no concorra ninguna reacción: quedarían tres incógnitas en una ecuación.

- ▼ ★ Enuncie el segundo teorema de Castigliano.

CON ESTO ABRES

La derivada de la energía respecto a una fuerza da el desplazamiento de su punto de aplicación.

En una estructura de material **elástico lineal**, la derivada parcial de la energía de deformación respecto a una fuerza aplicada es igual al **desplazamiento del punto de aplicación de esa fuerza, medido en la dirección de la fuerza**:

$$\delta_i = \partial U / \partial P_i$$

Y si se deriva respecto a un **momento**, se obtiene el **giro** en ese punto — porque el trabajo de un momento es momento × ángulo, igual que el de una fuerza es fuerza × distancia.

Las dos restricciones que hay que decir siempre: **el punto** y **la dirección** los fija la carga respecto a la que se deriva. Eso es lo que obliga a inventar cargas ficticias cuando se pide un desplazamiento donde no hay carga.

▼ ★ Demuestre por qué el teorema es cierto.

CON ESTO ABRES

Cargando la estructura en dos órdenes distintos: la energía final tiene que ser la misma.

Sea una estructura con varias cargas, y me interesa el desplazamiento del punto donde está P_i . La carga de **dos maneras**:

Orden A — primero todas las cargas (energía U), y al final le agrego a P_i un incremento dP_i . Por definición de derivada, la energía total queda:

$$U + (\partial U / \partial P_i) \cdot dP_i$$

Orden B — primero **solo** dP_i , cuyo trabajo es «pequeño por pequeño», despreciable de segundo orden. Después todas las cargas normales, que guardan la misma U . **Pero además** dP_i ya estaba puesta y es arrastrada por el desplazamiento δ_i que producen las demás, haciendo un trabajo **completo, sin 1/2**, porque no creció:

$$U + dP_i \cdot \delta_i$$

La estructura es elástica, así que la energía depende solo del **estado final**, no del camino. Los dos órdenes terminan igual, luego:

$$(\partial U / \partial P_i) \cdot dP_i = \delta_i \cdot dP_i \rightarrow \partial U / \partial P_i = \delta_i$$

▼ ★ ¿Qué hipótesis necesita el teorema? ¿Cuándo NO se puede usar?

CON ESTO ABRES

Elástico lineal, pequeñas deformaciones y superposición válida.

Tres hipótesis:

1. Material elástico lineal — se cumple la ley de Hooke. Es lo que hace que el trabajo sea el triángulo $\frac{1}{2}P\delta$ y que la energía no dependa del camino de carga.

2. Pequeñas deformaciones — la geometría no cambia apreciablemente al cargar, así que el equilibrio se plantea sobre la configuración inicial y los límites de integración no dependen de la carga.

3. Superposición válida — consecuencia de las dos anteriores, y es lo que legitima meter y sacar cargas ficticias.

No se puede usar con materiales no lineales o plastificados, con grandes desplazamientos (problemas de segundo orden, cables), ni cuando hay histéresis o disipación. Tampoco directamente con efectos de temperatura o asentamientos de apoyo: éstos hay que incorporarlos aparte, como términos adicionales en la ecuación de compatibilidad.

▼ ★ ¿Qué es el teorema de Menabrea?

CON ESTO ABRES

El del trabajo mínimo: las redundantes toman el valor que hace mínima la energía.

Es el **teorema del trabajo mínimo**: en una estructura hiperestática, las reacciones redundantes adoptan los valores que hacen **mínima** la energía de deformación:

$$\partial U / \partial R_i = 0$$

Es un **caso particular** de Castigliano: se aplica donde el desplazamiento correspondiente es nulo porque el vínculo lo impide. Como en cálculo la derivada cero indica un extremo, y aquí es un mínimo, de ahí el nombre.

Dicho de otra manera, es una forma bonita de recordarlo: **de todos los repartos de carga que equilibran la estructura, la naturaleza elige el que guarda menos energía.**

Lo usé en el Problema 1 y en la tarea del balcón.

▼ ¿Qué diferencia hay entre el primer y el segundo teorema de Castigliano?

CON ESTO ABRES

El primero deriva respecto a desplazamientos y da fuerzas; el segundo al revés.

El **segundo** es el que uso: se deriva la energía respecto a una **fuerza** y se obtiene un **desplazamiento** ($\partial U / \partial P = \delta$). Requiere expresar U en función de las cargas.

El **primero** es el recíproco: se deriva la energía respecto a un **desplazamiento** y se obtiene la **fuerza** correspondiente ($\partial U / \partial \delta = P$). Requiere expresar U en función de los desplazamientos, y es la base conceptual del **método de rigidez**, que es el que usan los programas de cálculo matricial.

En la práctica del curso siempre se usa el segundo, porque los datos son las cargas.

▼ ¿Qué significa que el resultado salga negativo?

CON ESTO ABRES

Que el desplazamiento va en sentido contrario al de la carga respecto a la que derivé.

Que el desplazamiento va en **sentido contrario** al de la carga (real o ficticia) respecto a la cual derivé. No es un error: es información.

Por eso el sentido de la carga ficticia se puede elegir libremente — el signo del resultado lo confirma o lo corrige. En mis dos problemas salió **positivo**, así que D y A se mueven en el sentido en que puse Q, o sea hacia la derecha.

Es el mismo criterio que con las reacciones: se supone un sentido, y si sale negativa es que va al revés.

▼ ¿Qué relación tiene Castigliano con el método de la carga unitaria?

CON ESTO ABRES

Son equivalentes: la misma integral $\int M \cdot m / EI \, dx$ con otra notación.

Son **el mismo cálculo**. Si en vez de una carga ficticia Q pongo una carga de valor 1, entonces $\partial N / \partial Q$ se convierte en la fuerza «n» que produce esa carga unitaria, y la fórmula queda:

$$\begin{array}{ll} \text{Castigliano:} & \delta = \sum N(\partial N / \partial Q)L/AE + \int M(\partial M / \partial Q)dx/EI \\ \text{Carga unit.:} & \delta = \sum n \cdot N \cdot L/AE + \int m \cdot M \, dx/EI \quad \leftarrow \text{lo mismo} \end{array}$$

Y lo comprobé explícitamente: $\partial M / \partial B_y = -x/2$ es **exactamente** el diagrama de momentos que produce 1 kN hacia arriba en el centro de la viga simplemente apoyada.

La diferencia es solo de presentación: Castigliano arrastra el símbolo Q por todo el desarrollo; la carga unitaria resuelve la estática dos veces, una con las cargas reales y otra con la unitaria. El profesor usa esta segunda forma en el problemario.

▼ ¿Cómo se calcularía un giro en vez de un desplazamiento?

CON ESTO ABRES

Aplicando un momento ficticio en ese punto y derivando respecto a él.

Se aplica un **momento ficticio** M_Q en el punto donde se quiere el giro, se resuelve la estructura con él dentro, se deriva $\partial U / \partial M_Q$ y se evalúa en $M_Q = 0$. El resultado es el **giro**, en radianes, en el sentido del momento aplicado.

Es la versión angular del mismo teorema: derivar respecto a una fuerza da desplazamiento, derivar respecto a un momento da rotación. La razón es que el trabajo de un momento es **momento** $\times$ **ángulo**, igual que el de una fuerza es fuerza $\times$ distancia.

▼ ¿Cómo se calcularía el desplazamiento RELATIVO entre dos puntos?

CON ESTO ABRES

Con un par de cargas ficticias iguales y opuestas, una en cada punto.

Se colocan **dos** cargas ficticias Q , iguales y opuestas, una en cada punto, actuando a lo largo de la recta que los une. Al derivar respecto a Q se obtiene el desplazamiento **relativo** — el acercamiento o separación entre ambos puntos.

Es la técnica que se usa, por ejemplo, para calcular la abertura de una grieta, la separación de los extremos de un anillo abierto, o el alargamiento de un tirante.

Análogamente, con un **par de momentos** opuestos se obtiene el giro relativo entre dos secciones.

▼ ¿Qué pasa si un apoyo cede?

CON ESTO ABRES

La condición ya no es cero: es el asentamiento, con su signo.

La condición de compatibilidad deja de ser $\partial U / \partial R = 0$ y pasa a ser $\partial U / \partial R = \delta_{\text{asentamiento}}$, con el signo según el sentido supuesto de R. Si el apoyo B bajara 5 mm y R fue supuesta hacia arriba, sería $\partial U / \partial B_y = -0,005 \text{ m}$.

El método es idéntico; solo cambia el segundo miembro. **Pero hay una diferencia importante: ahí el resultado sí depende de EI**, porque ya no se puede cancelar al no estar igualado a cero. Una estructura más rígida se ve más afectada por un asentamiento que una flexible — que es exactamente por lo que los asentamientos diferenciales son tan dañinos en estructuras rígidas.

▼ ¿Y los efectos de temperatura?

CON ESTO ABRES

Se suman como una deformación impuesta adicional en la ecuación de compatibilidad.

Un cambio de temperatura produce un alargamiento libre $\alpha \cdot \Delta T \cdot L$ en cada barra. Si la estructura es **isostática**, se deforma sin generar esfuerzos. Si es **hiperestática**, los vínculos se oponen y aparecen esfuerzos térmicos.

Se incorpora sumando ese término a la ecuación de compatibilidad:

$$\partial U / \partial R + \sum (\partial N / \partial R) \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot L = 0$$

Es el mismo esquema que con un asentamiento: una deformación impuesta que no viene de la carga.

▼ ★ ¿Qué significan las etiquetas «l, a» y «a» de las figuras?

CON ESTO ABRES

Es la convención del enunciado: «l, a» se deforma por flexión y axial; «a» sola, solo axial.

«l, a» = ese miembro se deforma por FLEXIÓN y por AXIAL

«a» = ese miembro se deforma SOLO por axial (barra de dos fuerzas)

Es la instrucción más importante de la figura, y conviene leerla **antes** de calcular nada: ya te está diciendo qué términos vas a tener que escribir.

En el Problema 2: solo AB lleva «l, a», así que **solo AB aporta flexión** — eso ahorra la mitad del trabajo. En el Problema 3: DE y EF llevan «l, a», y las cinco barras de la chapa llevan «a» sola.

Y es coherente con la física: las que llevan «a» sola son barras de dos fuerzas, que ni siquiera pueden desarrollar flector.

▼ ¿Qué significan las unidades de $EI = 1200 \text{ t}\cdot\text{m}^2$ y $AE = 400 \text{ t}$?

CON ESTO ABRES

Son las **rigideces a flexión y a axial**. Comprobar que dan metros al dividir es la **verificación dimensional**.

EI es la **rigidez a flexión**: producto del módulo de elasticidad por el momento de inercia. Sus unidades son fuerza $\times$ longitud² ($\text{t}\cdot\text{m}^2$). Cuanto mayor, menos se dobla la pieza.

AE (o **AE**) es la **rigidez axial**: módulo por área. Sus unidades son fuerza (t). Cuanto mayor, menos se alarga.

Y la comprobación dimensional sale sola:

$$\text{flexión: } [\text{t}\cdot\text{m}^3] / [\text{t}\cdot\text{m}^2] = \text{m} \quad \checkmark \qquad \text{axial: } [\text{t}\cdot\text{m}] / [\text{t}] = \text{m} \quad \checkmark$$

Los dos términos dan metros, que es lo que permite sumarlos. Si dieran cosas distintas, habría un error de planteamiento.

Que el enunciado dé el **producto** y no **E** e **I** por separado es una pista: no hace falta separarlos, y ni siquiera hace falta saber de qué material es.

▼ ¿Qué es el módulo de elasticidad y cuánto vale para el acero?

CON ESTO ABRES

200 GPa. Es la **pendiente de la zona elástica del diagrama tensión-deformación**.

E es la **pendiente de la zona elástica** del diagrama tensión-deformación: $\sigma = E\cdot\varepsilon$. Mide la **rigidez** del material, no su resistencia.

Para el acero estructural, **$E = 200 \text{ GPa} = 200\,000 \text{ MPa}$** , y es prácticamente el mismo para todos los aceros — un A36 y un acero de alta resistencia tienen el mismo **E**. Lo que cambia entre ellos es σ_y .

Ésa es exactamente la razón por la que **un acero más resistente no mejora una columna esbelta**: la carga de pandeo depende de **E**, que no cambió.

Órdenes de magnitud útiles: aluminio $\approx 70 \text{ GPa}$, concreto $\approx 25 \text{ GPa}$, madera $\approx 10 \text{ GPa}$.

▼ ¿Qué es σ_y y qué significa que el acero «ceda»?

CON ESTO ABRES

Es la **tensión a la que el acero empieza a deformarse permanentemente, sin aumentar la carga.**

σ_y es la **tensión de cedencia o fluencia**: el punto en el que el acero deja de comportarse elásticamente y empieza a deformarse de forma **permanente**, prácticamente sin necesidad de aumentar la carga. Aquí vale **250 MPa**.

Al descargar por debajo de σ_y la pieza vuelve a su forma original; por encima, queda una **deformación remanente**. Por eso se toma como límite de diseño: no porque la pieza se rompa ahí (la rotura es bastante después, en σ_u), sino porque deja de ser utilizable.

Y esa es justamente la virtud del acero: **cede antes de romperse**, y avisa con una deformación visible. Es lo que hace que la cedencia sea una falla dúctil y que se le pueda asignar un factor de seguridad menor que al pandeo.

▼ ¿De dónde salen las propiedades del perfil W250×80?

CON ESTO ABRES

De la **tabla de perfiles laminados**. La designación es **canto nominal × masa por metro**.

De la **tabla de perfiles W** que acompaña el enunciado. La designación W250×80 significa perfil de ala ancha (Wide flange) de **250 mm** de canto nominal y **80 kg/m** de masa.

$$A = 10\,200 \text{ mm}^2 \text{ (102 cm}^2\text{)}$$

$$I_x = 126 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad r_x = 111 \text{ mm}$$

$$I_y = 43,1 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad r_y = \mathbf{65,0 \text{ mm}} \leftarrow \text{el mínimo}$$

Lo importante de la tabla es saber **qué columna leer**: para pandeo, el radio de giro **mínimo**; para el área, el total. Notar que I_x es casi tres veces I_y — el perfil I es muy eficiente en un eje y débil en el otro.

★ ¿Qué es una condición de compatibilidad y por qué hace falta?

CON ESTO ABRES

Una ecuación de geometría: la deformada tiene que encajar con lo que permiten los apoyos.

Es una ecuación que impone que **la forma que toma la estructura al deformarse sea coherente con lo que los apoyos permiten**. «Compatible» quiere decir que no se contradiga: si hay un apoyo rígido en B, entonces B no baja, y punto.

Hace falta porque **el equilibrio no sabe nada de deformaciones**. A la estática le da igual si la viga es de acero o de gelatina, y por eso hay infinitas combinaciones de reacciones que la equilibran. Lo que selecciona la verdadera es la geometría de la deformación.

La manera clásica de verla, en tres pasos: (1) quito el apoyo B y la viga se hunde δ_0 ; (2) pongo solo B_y y la levanta $\delta_1 \cdot B_y$; (3) la real es la suma, y B tiene que quedar justo donde está el apoyo:

$$\delta_0 - \delta_1 \cdot B_y = 0 \rightarrow B_y = 586,67/10,67 = 55 \text{ kN}$$

Que da lo mismo que Castigliano, por otro camino.

▼ ★ ¿Qué es una barra de dos fuerzas y por qué solo tiene axial?

CON ESTO ABRES

Porque el equilibrio de dos fuerzas exige que sean colineales, y la única recta posible es el eje.

Es una barra cargada **únicamente en sus dos extremos**, ambos articulados, sin cargas intermedias.

Hay un teorema de estática: si un cuerpo está en equilibrio bajo **solo dos fuerzas**, esas fuerzas tienen que ser **iguales, opuestas y colineales**. Iguales y opuestas por $\Sigma F = 0$; colineales porque si no lo fueran formarían un **par** y el cuerpo giraría, violando $\Sigma M = 0$.

Y la única recta que pasa por los dos puntos de aplicación es **el eje de la barra**. Por tanto la fuerza va a lo largo del eje: es **puramente axial**, sin cortante ni flector.

Es lo que hace que una armadura entera se resuelva sin una sola integral.

▼ ¿Cómo se determina si una estructura es isostática?

CON ESTO ABRES

Comparando incógnitas contra ecuaciones, y contando también las condiciones internas.

Comparando incógnitas contra ecuaciones disponibles. Para una **armadura**:

$$G.D.H. = (b + r) - 2n$$

b = barras · r = reacciones · n = nudos (2 ecuaciones cada uno)

$= 0$ isostática · > 0 hiperestática · < 0 mecanismo

En el Problema 4: $(13 + 3) - 2(8) = 0$. En la chapa del Problema 3: $(5 + 3) - 2(4) = 0$.

Pero hay una trampa importante: el conteo global no basta si hay **condiciones internas**. La estructura del Problema 3 tiene 4 incógnitas de apoyo contra 3 ecuaciones y *parece* hiperestática, pero el pasador en D aporta una ecuación adicional ($\sum M = 0$ a un lado) y resulta **isostática de conjunto**.

Y un conteo favorable no garantiza estabilidad: hay que verificar que no haya barras mal dispuestas ni apoyos concurrentes o paralelos.

▼ ¿Qué transmite cada tipo de apoyo?

CON ESTO ABRES

Rodillo 1 fuerza, articulación 2, empotramiento 3. El pasador interno pasa fuerzas pero no momento.

Rodillo	→ 1 reacción (perpendicular a la superficie)
Articulación	→ 2 reacciones (H y V), NO momento
Empotramiento	→ 3 reacciones (H, V y momento)
Pasador interno	→ pasa 2 fuerzas, NO pasa momento ← da una ECUACIÓN extra

La lógica es siempre la misma: **un apoyo transmite reacción en aquello que impide**. Un rodillo deja deslizar y girar, así que solo reacciona perpendicular. Una articulación impide los dos desplazamientos pero deja girar, así que no hay momento. Un empotramiento lo impide todo.

Y a la inversa, el **pasador interno** es una **liberación**: no añade incógnitas, añade una ecuación. Por eso permite resolver estructuras que globalmente parecen hiperestáticas.

▼ ¿Qué es una chapa? ¿Se deforma o no?

CON ESTO ABRES

Es un panel triangulado: rígido para la estática, pero sus barras sí se deforman axialmente.

Es un panel triangulado que, **para el análisis del equilibrio**, se comporta como un cuerpo rígido: su forma no cambia y transmite las cargas como un bloque. Eso permite hacerle un único cuerpo libre en vez de ir nudo por nudo, y es lo que hice para sacar A_y en una línea con ΣM_D .

Pero eso es una idealización del equilibrio, no de la deformación. Sus barras **sí** se deforman axialmente — cada una lleva su «a» en la figura — y esa deformación es exactamente lo que entra en Castigliano: la diagonal AD aporta ella sola el **58 %** del desplazamiento total.

Rígida para la estática, deformable para la energía. Si alguien la tomara como indeformable perdería el aporte de AD y le daría 0,0073 m en vez de 0,0172 m — lectura que el propio enunciado descarta al rotular las barras con «a».

▼ ¿Cuándo es nula una barra? Nombre los casos.

CON ESTO ABRES

Tres reglas visuales, más la que sale del cálculo.

1. Dos barras NO colineales en un nudo descargado → las dos son nulas.
2. Dos barras colineales + una tercera, nudo descargado → la tercera es nula.
3. Dos barras en un nudo con la carga alineada con una de ellas → la otra es nula.
4. Y la que NO se ve: la que sale del cálculo.

En mi trabajo: **BF** y **DH** son el caso 2 (cordón inferior colineal más montante perpendicular, sin carga). **BC** del Problema 2 y **CD/BD** del Problema 3 son el caso 3.

CH es el caso 4: sale del nudo H, donde la componente vertical de EH vale $0,8 \times 12,5P = 10P$, exactamente la carga aplicada. Se cancelan y no queda nada para la otra diagonal. Es una coincidencia numérica de **esta** combinación de cargas: si la carga en H fuera $8P$, CH no sería nula.

Y ojo: **nula no es inútil**. Es una barra descargada *en esta hipótesis*; aporta estabilidad geométrica y trabaja en cuanto la carga cambie.

▼ ¿Cómo verificó que la estática estaba bien?

CON ESTO ABRES

Con comprobaciones que están en el papel: sumas, un nudo sobrante y un camino redundante.

Cada problema tiene la suya, y todas están escritas en el trabajo:

P1 — la suma de reacciones: $12,5 + 55 + 12,5 = 80 = 2P \checkmark$, y la simetría del resultado.

P2 — el equilibrio del nudo D cierra y la reacción D_y resulta consistente con el equilibrio vertical del conjunto.

P3 — **A_y sale por dos caminos independientes**: por ΣM_D sobre la chapa y por ΣF_y del nudo A, y las dos veces da $7 + 0,75Q$. Más el equilibrio global con $Q = 0$: $\Sigma F_x = 4 - 4 - 6 + 6 = 0$ y $\Sigma F_y = 7 - 4 - 3 = 0$.

P4 — **el nudo C, que no usé para resolver**: en una isostática siempre sobra un nudo, y ése es un chequeo gratis de todo lo anterior. Cierra en las dos direcciones.

Y el chequeo interno más bonito: en el Problema 3, M_{DE} evaluado en $s = 4$ da $12 \text{ t}\cdot\text{m}$, exactamente el momento aplicado en E.

▼ ¿Cómo se obtiene la dirección de una barra inclinada?

CON ESTO ABRES

Restando coordenadas (destino – origen), y dividiendo entre la longitud para el unitario.

- 1) Extremos: D(7 ; 0) B(4 ; 3)
- 2) Vector D→B = destino – origen = (4-7 ; 3-0) = (-3 ; +3)
- 3) Longitud: $L = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} = 4,243 \text{ m}$
- 4) Unitario: $u = (-3 ; 3)/3\sqrt{2} = (-1/\sqrt{2} ; +1/\sqrt{2})$

El **vector unitario** es el vector dividido entre su propia longitud: apunta igual pero mide 1. Sirve porque si la barra lleva una fuerza N, **sus componentes son N multiplicado por el unitario**. Es la forma de no equivocarse nunca con senos y cosenos.

Y desde el otro extremo el unitario es el **opuesto**: (+1/√2 ; -1/√2). Eso **es** la acción y reacción, incorporada automáticamente.

▼ ¿Por qué el brazo de una fuerza vertical se mide en horizontal?

CON ESTO ABRES

Porque el brazo es la distancia **PERPENDICULAR** a la línea de acción.

Porque el momento es $M = F \cdot d$ con **d = distancia perpendicular** entre la línea de acción de la fuerza y el punto donde tomo momentos. La perpendicular a una recta vertical es horizontal.

Por eso una fuerza **vertical** se mide con la separación **horizontal**, y una **horizontal** con la **vertical**. Es el error más común de toda la materia.

En la chapa del Problema 3: C está en (0;3) y D en (4;3), los separan 4 m en horizontal, y la carga en C es vertical → brazo 4. B está en (4;0) y D en (4;3), 3 m en vertical, y la carga en B es horizontal → brazo 3.

▼ ¿Por qué la resultante de una distribuida va en el centroide?

CON ESTO ABRES

Porque tiene que producir la misma fuerza total y el mismo momento que la carga repartida.

Porque la fuerza equivalente debe cumplir **dos** condiciones: dar la misma resultante (área del diagrama de carga) y el mismo momento respecto a cualquier punto. La segunda condición es la que fija **dónde** se aplica, y da el **centroide** del diagrama.

Para una carga uniforme sobre una longitud x : resultante $w \cdot x$ aplicada a **$x/2$** del extremo. De ahí que el momento salga cuadrático — $w \cdot x \cdot (x/2) = wx^2/2$ — y ése x^2 es la firma de una distribuida uniforme.

Para una triangular, la resultante es $\frac{1}{2} \cdot w \cdot x$ aplicada al **tercio** del lado mayor, y el momento sale cúbico.

PROBLEMA 1 · VIGA CONTINUA

▼ ¿Por qué el resultado del problema 1 no depende de EI ?

CON ESTO ABRES

Porque EI es constante, sale como factor común y se cancela al igualar a cero.

Porque EI es constante y sale como **factor común** de las dos integrales; al igualar la expresión a cero, se cancela. De hecho ni siquiera hace falta conocer su valor.

Es un resultado general importante: **en una estructura hiperestática de rigidez uniforme, las reacciones no dependen del material ni del tamaño de la sección**. Una viga de acero y una de madera con la misma forma tienen las mismas reacciones; lo que cambia son las flechas.

Si EI no fuera constante, no se podría sacar como factor: habría que meter $EI(x)$ dentro de cada integral y las reacciones **sí** dependerían de la relación de rigideces — el tramo más rígido atraería más carga. Es el mismo principio por el que en un pórtico las columnas gruesas atraen más momento.

▼ ¿Por qué $\partial M / \partial B_y = -x/2$ en los dos tramos?

CON ESTO ABRES

Porque B_y solo aparece dentro de A_y , y el término de P no la contiene.

Porque B_y aparece en **un solo sitio** de cada expresión: dentro de $A_y = P - B_y/2$, multiplicada por x . Derivando:

$$\partial / \partial B_y [(P - B_y/2) \cdot x] = -x/2$$

Y en el segundo tramo el término añadido **$-P(x-2)$ no contiene B_y** , así que al derivar desaparece. Por eso la derivada es la misma en los dos tramos — y eso es justamente lo que me permite sacarla como **factor común** y simplificar toda la ecuación.

El signo negativo también tiene sentido físico: si B_y aumenta, A_y disminuye, porque la carga total es fija y el apoyo central le «roba» carga a los extremos.

▼ ¿Es lógico que el apoyo central se lleve 55 de los 80 kN?

CON ESTO ABRES

Sí: es la firma de la viga continua, el apoyo central se lleva el 68,75 %.

Sí, y es característico de la viga continua. El apoyo central se lleva el **68,75 %** de la carga total, contra el 50 % que se llevarían dos vigas simplemente apoyadas independientes.

Es el efecto de la **continuidad**: cada tramo se apoya en el otro a través de B . Y por eso mismo aparece momento **negativo** sobre el apoyo ($-30 \text{ kN}\cdot\text{m}$), que en dos vigas separadas no existiría.

De hecho el momento sobre el apoyo (30) es mayor que el máximo positivo bajo la carga (25), así que **el diseño lo gobierna la sección sobre B** — que es donde iría el refuerzo superior si fuera concreto.

- ▼ La barra CD lleva 4 t. ¿Por qué no contribuye al desplazamiento de D?

CON ESTO ABRES

Porque su fuerza no depende de Q, así que su derivada es cero.

Porque lo que suma en Castigliano **no es N**, sino el producto **$N \cdot (\partial N / \partial Q) \cdot L$** . La fuerza de CD es un -4 t fijo que **no depende de Q**, así que $\partial N / \partial Q = 0$ y todo el término se anula.

Dicho en física: si empujo D hacia la derecha, la fuerza viaja por la diagonal BD hasta B y de ahí por la viga AB hasta el empotramiento. **CD y BC quedan fuera de ese camino de carga y no se enteran.**

Ésta es la idea central del método: **una barra puede estar fuertemente cargada y no aportar nada a un desplazamiento concreto**. Lo que importa no es cuánta fuerza lleva, sino cuánto *cambia* esa fuerza cuando muevo el punto que estoy midiendo.

- ▼ ¿Le parece razonable un desplazamiento de 24,93 cm?

CON ESTO ABRES

En una estructura real sería inadmisibile. Las rigideces del enunciado son bajas a propósito.

No, en una estructura real sería completamente inadmisibile: más de $L/30$, cuando el límite de servicio habitual es $L/300$ o $L/360$.

Pero es un problema académico con rigideces **deliberadamente bajas**: $aE = 400$ t equivale a un área ridícula para acero. Y están elegidas así a propósito, para que los dos términos salgan **comparables** — flexión 0,12444 contra axial 0,12485 — y ninguno de los dos se pueda despreciar.

Es un ejercicio de método, no un caso de proyecto. Si fuera real, con perfiles normales, el desplazamiento estaría en el orden de milímetros.

▼ ¿Por qué la reacción en D sale hacia abajo?

CON ESTO ABRES

Porque la diagonal traccionada jala a D hacia arriba, y el apoyo tiene que equilibrar.

Porque la diagonal BD está **traccionada** y jala a D hacia arriba y hacia la izquierda. Para equilibrar verticalmente, el apoyo tiene que empujar **hacia abajo**: $D_y = -(4+Q)$, o sea $4 \text{ t} \downarrow$ con $Q = 0$.

Eso implica que ese rodillo debe poder trabajar **en los dos sentidos**, o estar anclado. Un rodillo que solo empuje hacia arriba se despegaría.

Es un detalle que vale la pena señalar: demuestra que uno **leyó** el resultado y no solo lo calculó.

- ▼ ¿Por qué la flexión aporta apenas el 0,35 % en el problema 3?

CON ESTO ABRES

Porque los dos tramos flectan en sentidos opuestos y casi se cancelan: **+48** contra **-47,25**.

Porque los dos miembros del pórtico flectan en sentidos **opuestos**: DE aporta **+48** y EF aporta **-47,25**. La suma queda en 0,75, un residuo del 1,5 % de lo que aporta cada uno.

$$\delta_{\text{axial}} = 54/3150 = 0,0171429 \text{ m} \quad (99,65 \%)$$

$$\delta_{\text{flexión}} = 0,75/12600 = 0,0000595 \text{ m} \quad (0,35 \%)$$

Físicamente: cuando empujo A hacia la derecha, la viga DE y la columna EF giran en sentidos contrarios y sus energías de flexión casi se anulan entre sí. El desplazamiento de A es, para efectos prácticos, **puramente axial**, dominado por la diagonal AD con el 58 %.

Y no es una casualidad ni un error: en los cuartos parciales de 2009 y 2014 del mismo profesor la flexión se anula **del todo** y la carga ficticia viaja solo por los axiales.

▼ ★ ¿Cómo determinó el sentido del momento de 12 t·m en E?

CON ESTO ABRES

Lo leí antihorario en la figura. Si fuera horario, δ_A pasaría de 0,0172 a 0,0429 m.

Lo leí **antihorario** en la figura del enunciado, y así lo declaré explícitamente en el trabajo. Es el único dato de los cuatro problemas que sale de **interpretar un dibujo** y no de calcular, así que conviene dejarlo dicho.

Con esa lectura, el momento que trae la viga DE al llegar a E ($12 + 3Q$) se **cancela** con el aplicado, y la ecuación de la columna queda limpia: $M = t^2 - Q(3+t)$, o sea $M = t^2$ con $Q = 0$.

Si fuera **horario**, en vez de cancelarse se **sumaría**, la expresión de M en EF sería distinta y el término de flexión dejaría de ser residual. El resultado pasaría a $\delta_A \approx 0,0429 \text{ m}$ en vez de 0,0172 m.

El método sería exactamente el mismo: cambia únicamente el signo con el que ese momento entra en la ecuación de esa barra.

▼ ¿Por qué el momento de 12 t·m no aparece en la derivada?

CON ESTO ABRES

Porque es una carga real constante: no depende de Q , así que al derivar desaparece.

Porque es una **carga real y constante**, no depende de Q . Al derivar respecto a Q se va, igual que se iría cualquier número.

Pero **sí** aparece al evaluar en $Q = 0$ — de hecho es lo que cancela el momento que trae DE y deja $M = t^2$, sin más.

Ésa es la distinción central del método: **lo que se deriva** es solo lo que depende de Q ; **lo que se evalúa** es todo. Confundirlas es uno de los errores típicos.

▼ Explique el despiece de la columna EF.

CON ESTO ABRES

Las cargas aplicadas en E se comen casi todo lo que trae DE; a la columna solo le entra el residuo.

Corto a una distancia t desde E hacia abajo y me quedo con el trozo de arriba. Lo que pasa en el nudo E es que las cargas aplicadas **casi cancelan** lo que trae la viga:

	trae DE	aplicado en E	entra a EF
horizontal	$(4 + Q)$	$4 t \leftarrow$	Q
momento	$12 + 3Q$	$12 t \cdot m \curvearrowright$	$3Q$

Entonces sobre el trozo de arriba actúan tres cosas:

- ① la distribuida sobre la longitud t : $2t$ con brazo $t/2 \rightarrow t^2$
- ② el momento residual $3Q$, que entra por arriba $\rightarrow -3Q$
- ③ la fuerza residual Q , con brazo t hasta el corte $\rightarrow -Q \cdot t$

$$M = t^2 - Q(3 + t) \quad \partial M / \partial Q = -(3 + t)$$

$$\text{Con } Q = 0 : M = t^2$$

Es el despiece más difícil de los cuatro problemas, precisamente por ese juego de cancelaciones en el nudo E.

▼ ¿Por qué E_y es mayor que A_y ?

CON ESTO ABRES

Porque la carga está descentrada hacia la derecha: la resultante actúa a 7,06 m de A.

Porque la resultante de las cargas está claramente **descentrada hacia la derecha**: la más grande, 10P, cuelga de H, a 9 m de A pero a solo 3 m de E.

resultante = 17P, aplicada a $120P/17P = 7,06$ m de A
(el centro de la luz está a 6 m → está corrida 1,06 m hacia E)

Y hay una comprobación de sentido común que conviene tener siempre a mano: **el apoyo más cercano a la resultante se lleva más carga**. Si sale al revés, hay un error.

▼ ¿Por qué el enunciado pide indicar tracción o compresión en la tabla?

CON ESTO ABRES

Porque el signo decide qué criterio de falla aplica a cada miembro.

Porque **el signo decide qué criterio hay que verificarle a cada miembro**:

traccionado	→	solo CEDENCIA	(no puede pandear)
comprimido	→	CEDENCIA y PANDEO	(y el pandeo suele mandar)

Sin esa columna la tabla no sirve para diseñar: uno no sabría a cuáles aplicarle el criterio de Euler. Es la información que conecta la mitad de análisis con la mitad de diseño.

Y por eso también hay que listar **las 13 barras**, incluidas las nulas: el enunciado pide la tabla «sobre cada uno de los miembros».

- ▼ ¿Qué significa $P = 68 \text{ kN}$ en términos de cargas reales?

CON ESTO ABRES

Las cargas de nudo serían 272, 204 y 680 kN, para un total de 1156 kN.

$$4P = 272 \text{ kN en F} \quad \cdot \quad 3P = 204 \text{ kN en G} \quad \cdot \quad 10P = 680 \text{ kN en H}$$

$$\text{total} = 17P = \mathbf{1156 \text{ kN}} \text{ sobre una armadura de 12 m}$$

$$\text{reacciones: } A_y = 7P = 476 \text{ kN} \quad \cdot \quad E_y = 10P = 680 \text{ kN}$$

Es una armadura de puente o de cubierta industrial pesada, perfectamente razonable para perfiles W250×80.

- ▼ Verifique que su resultado cumple los dos criterios.

CON ESTO ABRES

FS de 3,00 exacto en pandeo y 5,00 en cedencia. El que rige siempre queda al límite.

$$\text{Fuerza en HE con } P = 68 : 12,5 \times 68 = \mathbf{850 \text{ kN}}$$

$$\text{Tensión: } 850\,000 \text{ N} / 10\,200 \text{ mm}^2 = \mathbf{83,33 \text{ MPa}}$$

$$\text{contra PANDEO: } 250 / 83,33 = \mathbf{3,00} \quad \checkmark \text{ exactamente el FS pedido}$$

$$\text{Fuerza en DE (máx. tracción): } 7,5 \times 68 = 510 \text{ kN} \rightarrow 50,0 \text{ MPa}$$

$$\text{contra CEDENCIA: } 250 / 50,0 = \mathbf{5,00} \quad \checkmark \text{ muy por encima del 1,75}$$

Y ahí está la comprobación de que se tomó bien el mínimo: **el criterio que rige queda justo en el límite** y todos los demás holgados. Si ninguno quedara al límite, es que no se tomó el mínimo; si dos quedaran por debajo, hay un error.

- ▼ Explique la tarea: ¿qué modeló y por qué?

CON ESTO ABRES

Una viga IPE 200 de balcón, empotrada en la pared y apuntalada en el extremo.
Hiperestática de primer grado.

Es un balcón real: una viga **IPE 200** de 3 m que sostiene la losa, **empotrada** en el muro de carga en A y **apuntalada** por una columna auxiliar en B, con $w = 4 \text{ kN/m}$ y $EI = 3880 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$.

Es hiperestática de primer grado: 3 reacciones del empotramiento más 1 del puntal contra 3 ecuaciones. Tomé **R_B como redundante** porque al quitarla queda un **voladizo**, que es lo más fácil de escribir, y porque en B hay un puntal rígido, así que $\delta_B = \partial U / \partial R_B = 0$ — Menabrea otra vez.

$$R_B = 3wL/8 = 4,5 \text{ kN} \quad \cdot \quad R_A = 5wL/8 = 7,5 \text{ kN} \quad \cdot \quad M_A = wL^2/8 = 4,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

▼ ¿Cuál es la conclusión práctica de la tarea?

CON ESTO ABRES

Que el problema de un balcón nunca es la resistencia, es la flecha — y el puntal es lo que lo hace viable.

Que la viga está **sobradísima por resistencia** y aun así el puntal es imprescindible:

$$\sigma = M/S = 4,5 \text{ kN}\cdot\text{m} / 194 \text{ cm}^3 = \mathbf{23,2 \text{ MPa}} \quad \text{contra } \sigma_y = 250 \rightarrow \text{FS} = \mathbf{10,8}$$

$$\text{SIN puntal (voladizo): } \delta = wL^4/8EI = \mathbf{10,44 \text{ mm}} > L/360 = 8,33 \text{ mm} \rightarrow \text{NO CUMPLE}$$

$$\text{CON puntal: } \delta_{\text{máx}} = \mathbf{0,452 \text{ mm}} = L/6633 \rightarrow \text{sobra } \times 18$$

Y además el puntal baja el momento de empotramiento de $wL^2/2 = 18 \text{ kN}\cdot\text{m}$ a $wL^2/8 = 4,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$, **cuatro veces menos**, lo que descarga radicalmente la conexión a la pared — que suele ser el detalle más delicado de un balcón.

La conclusión: **en un balcón el criterio que manda es el de servicio, no el de resistencia.**

▼ ¿La flecha máxima está en el centro de la viga?

CON ESTO ABRES

No: está corrida hacia el apoyo simple, en $x = 0,578L$.

No, y es un detalle que suelen preguntar. Por la **asimetría de los apoyos** — un empotramiento y un apoyo simple — la flecha máxima está corrida hacia el lado que menos restringe, o sea hacia el apoyo simple:

$$x = (15 - \sqrt{33})L/16 = \mathbf{0,5785 L} = 1,735 \text{ m} \rightarrow \delta_{\text{máx}} = \mathbf{0,4523 \text{ mm}}$$
$$\text{en el centro exacto: } \delta = wL^4/192EI = \mathbf{0,4349 \text{ mm}}$$

La diferencia es del 4 %. En una viga **simétrica** (biapoyada o biempotrada) sí coincidirían el centro y el máximo.

▼ ¿De dónde sale el criterio $L/360$?

CON ESTO ABRES

Es el límite de servicio típico para elementos con acabados frágiles.

Es el límite de **servicio** habitual para flechas en elementos que soportan acabados frágiles — baldosas, cerámica, revestimientos que se agrietan. $L/360 = 3000/360 = 8,33 \text{ mm}$.

No es un criterio de resistencia: la viga no se rompería con 10 mm de flecha. Es un criterio de **uso**: por encima de ese límite el piso se agrieta, las puertas rozan y el usuario percibe que «se hunde».

Hay otros según el caso: $L/240$ para elementos sin acabados frágiles, $L/500$ para vigas que soportan tabiquería de yeso.

TRAMPAS Y "¿Y SI...?" · LAS QUE BUSCAN SI COPIASTE

▼ ★ Resuélvame el problema 1 eligiendo otra redundante.

CON ESTO ABRES

Quito A_y , queda apoyada en B y C, y la condición es $\partial U / \partial A_y = 0$. Mismo resultado.

Se puede, y da lo mismo. Al liberar A_y queda una viga apoyada en B y C, que sigue siendo isostática y **estable** — ése es el único requisito.

La condición sería $\partial U / \partial A_y = 0$, porque el rodillo en A tampoco cede.

Lo que cambia: **pierdo la simetría**, porque la incógnita ya no está en el eje. Tendría que escribir los momentos en los **cuatro** tramos en vez de dos, y despejar A_y directamente en vez de B_y . Más álgebra, mismo resultado: 12,5 y 55 kN.

Por eso B_y es la elección inteligente, aunque cualquiera sea válida.

▼ ¿Qué pasaría si le pidieran el desplazamiento VERTICAL de D en el problema 2?

CON ESTO ABRES

Sería cero, sin calcular nada: D es un rodillo que impide justamente ese desplazamiento.

Sería **cero**, y no habría que calcular nada: D es un rodillo que impide precisamente el desplazamiento vertical.

Si uno pusiera una Q vertical ahí y derivara, tendría que salir cero — sería una buena comprobación del método, pero no un problema.

Es la misma lógica del Problema 1 al revés: allá el desplazamiento nulo era la **ecuación** que me faltaba; acá sería simplemente la **respuesta**.

▼ ¿Qué pasa si anula la carga ficticia antes de derivar?

CON ESTO ABRES

Se pierde la dependencia y la derivada da cero: el método colapsa.

Se rompe todo. Si hago $Q = 0$ primero, Q desaparece de las expresiones de N y M, y al derivar respecto a Q obtengo **cero**. El desplazamiento saldría nulo, que es absurdo.

El orden correcto es: **(1)** resolver la estática con Q dentro, **(2)** escribir $N(Q)$ y $M(x, Q)$, **(3)** derivar respecto a Q, **(4)** recién ahí evaluar en $Q = 0$.

La forma de recordarlo: $\partial M / \partial Q$ pregunta «¿cuánto cambia M si muevo Q?», y para poder responder eso, **Q tiene que estar en la ecuación**.

- ▼ Si duplico todas las cargas, ¿qué le pasa a las reacciones y a los desplazamientos?

CON ESTO ABRES

Todo se duplica: el sistema es lineal. Pero las reacciones hiperestáticas ya eran independientes de EI .

Todo se duplica, porque la estructura es **elástica lineal** y vale superposición: reacciones, esfuerzos y desplazamientos son proporcionales a las cargas.

Ahora, hay un matiz interesante: en el Problema 1 las **reacciones** ya eran independientes de EI y proporcionales a P ($5P/16$ y $11P/8$), así que duplicar P duplica las reacciones y también duplica las flechas. Pero si en vez de duplicar la carga **duplicara EI** , las reacciones no cambiarían en absoluto y las flechas se reducirían a la mitad.

En el Problema 4 el efecto es directo: si las cargas de nudo se duplican, $P_{\text{máx}}$ se reduce a la mitad, 34 kN.

- ▼ ¿Qué pasaría si el material entrara en régimen plástico?

CON ESTO ABRES

Castigliano dejaría de ser aplicable: es un teorema de elasticidad lineal.

Castigliano **dejaría de ser aplicable**. Todo el teorema descansa en que la energía sea función de estado — que no dependa del camino de carga — y eso solo se cumple en elasticidad. En plasticidad hay **disipación**: parte del trabajo se pierde y no se recupera al descargar.

También se caería la superposición, así que ni las cargas ficticias ni la suma de efectos serían válidas.

Para ese régimen existen otros métodos: análisis límite, teoría de rótulas plásticas, y el cálculo del **momento plástico** y el factor de carga de colapso. Son la base del diseño plástico en acero.

▼ ¿Su estructura del problema 3 es isostática o hiperestática? Sea preciso.

CON ESTO ABRES

Isostática de conjunto: globalmente parece hiperestática, pero el pasador aporta la ecuación que falta.

Es **isostática**, pero hay que decirlo con cuidado porque el conteo global engaña.

Contando solo el contorno: 4 incógnitas de apoyo (A_y , F_x , F_y , M_F) contra 3 ecuaciones de equilibrio global. **Parece** hiperestática de primer grado.

Pero el **pasador en D** aporta una ecuación adicional — $\Sigma M = 0$ a un lado del corte, porque no transmite momento — y con ella se cierra el sistema. Se llama **isostática de conjunto**: el conteo global sugiere hiperestaticidad, pero las condiciones internas la resuelven.

La prueba práctica es que **la resolví enteramente por equilibrio**, sin usar ni una condición de compatibilidad. Si hubiera necesitado una, sería hiperestática.

▼ ¿Por qué la barra CH sale nula si en H hay una carga grande?

CON ESTO ABRES

Porque la componente vertical de EH equilibra exactamente los 10P. Sale del cálculo, no de una regla.

Justamente por la carga. En el nudo H, la componente vertical de la diagonal EH vale $0,8 \times 12,5P = 10P$, que es **exactamente** la carga aplicada en ese nudo:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y : \quad & 0,8(12,5P) - 0,8 \cdot N_{HC} - 10P = 0 \\ & 10P - 0,8 \cdot N_{HC} - 10P = 0 \quad \rightarrow \quad N_{HC} = 0 \end{aligned}$$

Se cancelan y no queda nada para la otra diagonal. **No es una regla visual**: sale del cálculo, y es una coincidencia numérica de **esta** combinación de cargas. Si la carga en H fuera 8P en vez de 10P, CH no sería nula.

Por eso hay que calcularla y no darla por sentada — y decirlo así demuestra que uno entendió la diferencia con BF y DH, que sí salen de una regla.

- ▼ Si le dijera que el desplazamiento le dio mal, ¿cómo lo verificaría?

CON ESTO ABRES

Comprobación dimensional, orden de magnitud, signo, y los chequeos internos de la estática.

Cuatro verificaciones, en ese orden:

- 1. Dimensional.** Flexión: $[t \cdot m^3]/[t \cdot m^2] = m \checkmark$. Axial: $[t \cdot m]/[t] = m \checkmark$. Si no dan metros, hay un error de planteamiento, no de cuenta.
- 2. Signo.** Positivo significa que se mueve en el sentido de Q. Si sale al revés de lo que dice la intuición física, hay que revisar.
- 3. Estática.** Los chequeos internos: A_y por dos caminos en el P3, el $M_{DE}(s=4) = 12 \text{ t} \cdot m$ que cuadra con el momento aplicado, el equilibrio global.
- 4. Orden de magnitud.** Con rigideces tan bajas como las del enunciado, centímetros es esperable; milímetros o metros indicarían un factor equivocado.

- ▼ ¿Qué pasa si en un miembro comprimido la esbeltez fuera muy pequeña, digamos 20?

CON ESTO ABRES

Es una columna corta: falla por aplastamiento puro, sin ninguna reducción por pandeo.

Sería una **columna corta**. El pandeo deja de ser un modo de falla posible: la pieza simplemente se aplasta al alcanzar σ_y .

Con $\lambda = 20$, Euler predice $\sigma_{cr} = \pi^2(200\,000)/400 = 4935 \text{ MPa}$ — veinte veces la cedencia, absolutamente irrelevante. La barra cede muchísimo antes.

En ese caso el único criterio sería el de cedencia, y con FS 1,75 daría $N_{adm} = 1457 \text{ kN}$.

Pero **en este enunciado seguiría rigiendo el pandeo** igual, porque el tope en σ_y con FS 3 da 850 kN, menos que 1457. Ése es el punto que ya demostramos: con estos factores, el criterio de pandeo tapa al de cedencia sea cual sea la esbeltez.

▼ ¿Podría haber resuelto los problemas 2 y 3 con otro método?

CON ESTO ABRES

Sí: carga unitaria, viga conjugada, doble integración o rigidez matricial.

Sí, hay varios caminos:

Carga unitaria (trabajo virtual) — es literalmente el mismo cálculo, $\int M \cdot m / EI \, dx$, solo que resolviendo la estática dos veces en vez de arrastrar el símbolo Q . Es la forma que usa el profesor en el problemario.

Doble integración o viga conjugada — sirven bien para vigas, pero se vuelven incómodas en pórticos y armaduras con barras inclinadas.

Rigidez matricial — el método general, el de los programas de cálculo.

Castigliano es el que pide el enunciado, y es el más directo cuando se pide **un solo** desplazamiento en **un solo** punto: no hay que resolver la elástica completa, solo evaluar una integral.

▼ ¿Por qué en el problema 4 no usó Castigliano?

CON ESTO ABRES

Porque no piden ningún desplazamiento: es un problema de análisis y diseño, no de deformaciones.

Porque no lo piden. El Problema 4 pregunta por la **carga máxima**, que es un problema de resistencia y estabilidad, no de deformaciones. Castigliano sirve para calcular desplazamientos o para resolver hiperestáticas, y aquí no hace falta ninguna de las dos cosas: la armadura es isostática y se resuelve por equilibrio puro.

Si en cambio pidieran **la flecha del nudo H**, ahí sí usaría Castigliano, con la fórmula axial: $\delta = \sum N(\partial N / \partial P)L / (AE)$, sumando sobre las 13 barras. Sin integrales, porque N es constante en cada una.

the 'information' and 'communication' fields. The 'information' field is defined as:

...the study of the processes of information production, distribution, access, use and evaluation, and the study of the social, cultural, economic and political contexts in which these processes take place. (p. 10)

The 'communication' field is defined as:

...the study of the processes of communication production, distribution, access, use and evaluation, and the study of the social, cultural, economic and political contexts in which these processes take place. (p. 10)

The 'information' field is defined as:

...the study of the processes of information production, distribution, access, use and evaluation, and the study of the social, cultural, economic and political contexts in which these processes take place. (p. 10)

The 'communication' field is defined as:

...the study of the processes of communication production, distribution, access, use and evaluation, and the study of the social, cultural, economic and political contexts in which these processes take place. (p. 10)

The 'information' field is defined as:

...the study of the processes of information production, distribution, access, use and evaluation, and the study of the social, cultural, economic and political contexts in which these processes take place. (p. 10)

The 'communication' field is defined as:

...the study of the processes of communication production, distribution, access, use and evaluation, and the study of the social, cultural, economic and political contexts in which these processes take place. (p. 10)

The 'information' field is defined as:

...the study of the processes of information production, distribution, access, use and evaluation, and the study of the social, cultural, economic and political contexts in which these processes take place. (p. 10)

The 'communication' field is defined as:

...the study of the processes of communication production, distribution, access, use and evaluation, and the study of the social, cultural, economic and political contexts in which these processes take place. (p. 10)

The 'information' field is defined as:

...the study of the processes of information production, distribution, access, use and evaluation, and the study of the social, cultural, economic and political contexts in which these processes take place. (p. 10)

The 'communication' field is defined as:

...the study of the processes of communication production, distribution, access, use and evaluation, and the study of the social, cultural, economic and political contexts in which these processes take place. (p. 10)

The 'information' field is defined as:

...the study of the processes of information production, distribution, access, use and evaluation, and the study of the social, cultural, economic and political contexts in which these processes take place. (p. 10)