

Cuarta Evaluación — Teorema de Castigliano

Prof. Ing. Miguel Ángel Rodríguez · 20 de julio de 2026 · Misael Scarbay

 **ENTREGA: mañana martes 21-jul, antes de las 8:59 a.m.**

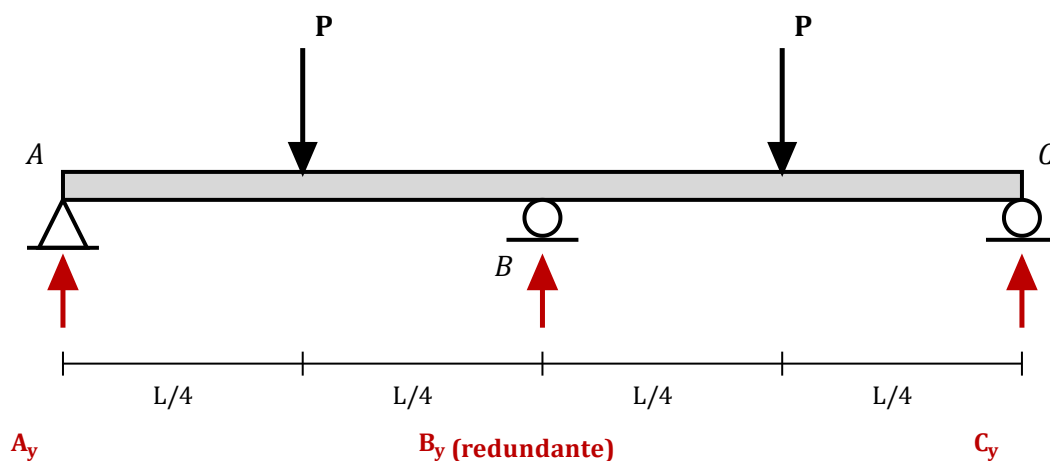
- **A mano y escaneada** — este documento es para *copiarlo*, no para imprimirlo y entregarlo.
- Correo institucional del profesor · Asunto exacto: **4P MSII Scarbay**
- Puntaje: $4 + 4 + 6 + 6 =$ **20 pts**

Cómo usar esto. Sigo paso a paso el método del profesor (el mismo del despiece del 4P-2017): ① poner la carga Q · ② estática global con reacciones en función de Q · ③ despiece (cuerpo libre de cada barra) · ④ ecuaciones $N(x)$ y $M(x)$ · ⑤ derivar $\partial/\partial Q$ y botar lo que da cero · ⑥ integrar barra por barra · ⑦ sumar. Todos los resultados están verificados por tres caminos independientes (análisis matricial de rigidez, discretización de las cargas distribuidas e integración simbólica).

Problema 1 — Reacciones de la viga ABC

4 pts

$P = 40 \text{ kN}$, $L = 8 \text{ m}$, EI constante. Determine las reacciones por el teorema de Castigliano tomando B_y como redundante. Aproveche la simetría.



Viga continua de dos tramos de 4 m, con una carga P en el centro de cada tramo.

① Grado de hiperestaticidad y simetría

Reacciones incógnitas: $A_x, A_y, B_y, C_y \rightarrow 4$

Ecuaciones de estática: $\rightarrow 3$

$GH = 4 - 3 = 1 \rightarrow$ hiperestática de PRIMER grado

$A_x = 0$ (no hay cargas horizontales)

La simetría (esto es lo que pide el profesor). La viga y las cargas son simétricas respecto al punto medio B ($x = L/2 = 4$ m). Por lo tanto:

$$A_y = C_y$$

$$\Sigma F_y = 0 : A_y + B_y + C_y = 2P$$

$$2A_y + B_y = 2P$$

$$\rightarrow A_y = C_y = P - B_y/2$$

Con la simetría todo queda en función de **una sola incógnita** B_y , y además solo hay que integrar **media viga** y multiplicar por 2. Eso es lo que ahorra el trabajo.

② Condición de compatibilidad (Castigliano)

El apoyo B es un rodillo $\rightarrow$ el desplazamiento vertical en B es nulo:

$$\delta_B = \partial U / \partial B_y = 0 \quad \rightarrow \quad (1/EI) \int M \cdot (\partial M / \partial B_y) dx = 0$$

③ EL DESPIECE — cuerpo libre y cortes

Aquí la estructura es una sola viga, así que el despiece son los **dos tramos** de media viga: por simetría solo se estudia de A hasta B y al integrar se multiplica por 2.

① Viga completa *reacciones en función de B_y* **simétrica $\rightarrow A_y = C_y$**



Toda la viga - B_y es la redundante

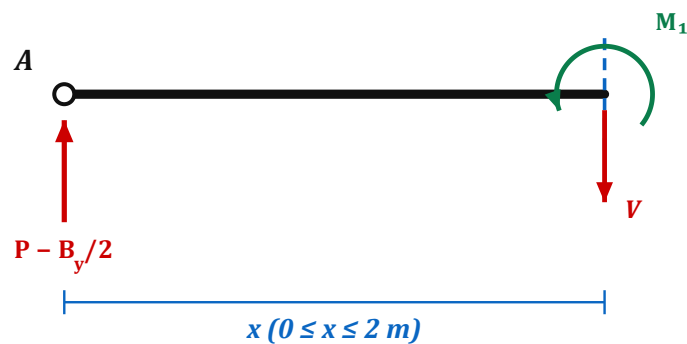
$$\Sigma F_y: A_y + B_y + C_y = 2P$$

$$\text{Simetría: } A_y = C_y$$

$$\rightarrow A_y = C_y = P - B_y/2$$

Todo queda en función de UNA sola incógnita.

② Tramo A-1 *antes de la carga*



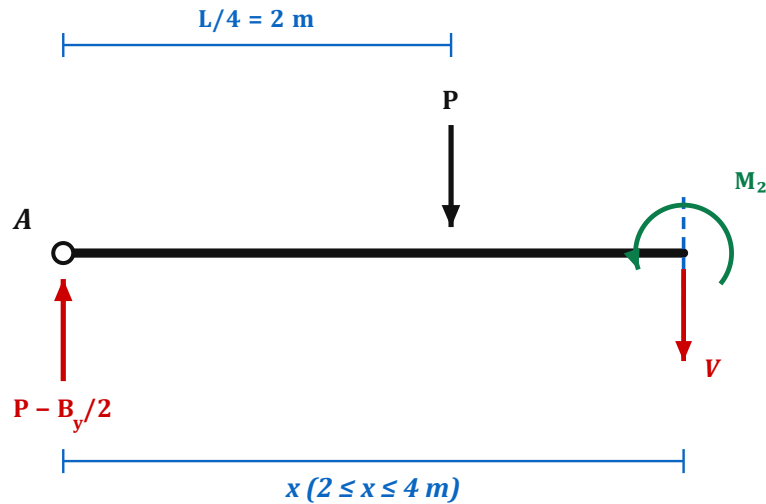
Tramo A-1 ($0 \leq x \leq L/4 = 2 \text{ m}$)

Antes de la primera carga: solo actúa A_y .

$$M_1 = A_y \cdot x = (P - B_y/2) \cdot x$$

$$\partial M_1 / \partial B_y = -x/2$$

③ Tramo 1-B *después de la carga*



Tramo 1-B ($2 \text{ m} \leq x \leq L/2 = 4 \text{ m}$)

Ya se pasó la carga P en $x = 2 \text{ m}$: hay que restarla.

$$\begin{aligned} M_2 &= A_y \cdot x - P(x - 2) \\ &= (P - B_y/2) \cdot x - P(x - 2) \end{aligned}$$

$$\partial M_2 / \partial B_y = -x/2$$

La derivada es la MISMA en los dos tramos: B_y entra igual en toda la media viga.

④ Integrar ($\times 2$ por simetría) e igualar a cero

$$\delta_B = \partial U / \partial B_y = 0 :$$

$$(2/EI) \left[\int_0^2 M_1 \cdot (\partial M_1 / \partial B_y) dx + \int_2^4 M_2 \cdot (\partial M_2 / \partial B_y) dx \right] = 0$$

El 2 es la simetría: se integra media viga y se cuenta dos veces.

Paso 1 – sacar el factor común. Como $\partial M / \partial B_y = -x/2$ en LOS DOS tramos:

$$(2/EI) \cdot (-1/2) \left[\int_0^2 M_1 \cdot x dx + \int_2^4 M_2 \cdot x dx \right] = 0$$

$$(-1/EI) [\dots] = 0 \quad \text{y como } -1/EI \neq 0, \text{ el corchete tiene que ser cero:}$$

$$\int_0^2 M_1 \cdot x \, dx + \int_2^4 M_2 \cdot x \, dx = 0$$

Paso 2 – sustituir M_1 y M_2 . Con $R = A_y = P - B_y/2$:

$$M_1 = R \cdot x$$

$$M_2 = R \cdot x - P(x - 2)$$

$$\int_0^2 R \cdot x^2 \, dx + \int_2^4 [R \cdot x^2 - P(x - 2) \cdot x] \, dx = 0$$

Paso 3 – juntar las dos de $R \cdot x^2$. Es la misma función en tramos seguidos (de 0 a 2 y de 2 a 4), así que se unen en una sola de 0 a 4:

$$\int_0^4 R \cdot x^2 \, dx - \int_2^4 P(x - 2) \cdot x \, dx = 0$$

$$\rightarrow \int_0^4 R \cdot x^2 \, dx = \int_2^4 P(x - 2) \cdot x \, dx \quad (\text{se pasa la segunda al otro lado})$$

Paso 4 – resolver cada integral.

$$\text{Izquierda: } R \cdot [x^3/3]_0^4 = R \cdot (64/3 - 0) = R \cdot (64/3)$$

$$\begin{aligned} \text{Derecha: } P \cdot \int_2^4 (x^2 - 2x) \, dx &= P \cdot [x^3/3 - x^2]_2^4 \\ &= P \cdot [(64/3 - 16) - (8/3 - 4)] \\ &= P \cdot (56/3 - 12) = P \cdot (20/3) \end{aligned}$$

Paso 5 – despejar.

$$R \cdot (64/3) = P \cdot (20/3) \quad \rightarrow \quad R = 20P/64 = 5P/16$$

⑤ Reacciones

$$A_y = C_y = 5P/16 = 5(40)/16 = 12,5 \text{ kN } \uparrow$$

$$B_y = 2P - 2A_y = 80 - 25 = 55 \text{ kN } \uparrow \quad (= 11P/8)$$

$$A_x = 0$$

$$\text{Comprobación: } 12,5 + 55 + 12,5 = 80 \text{ kN} = 2P \quad \checkmark$$

RESPUESTA PROBLEMA 1

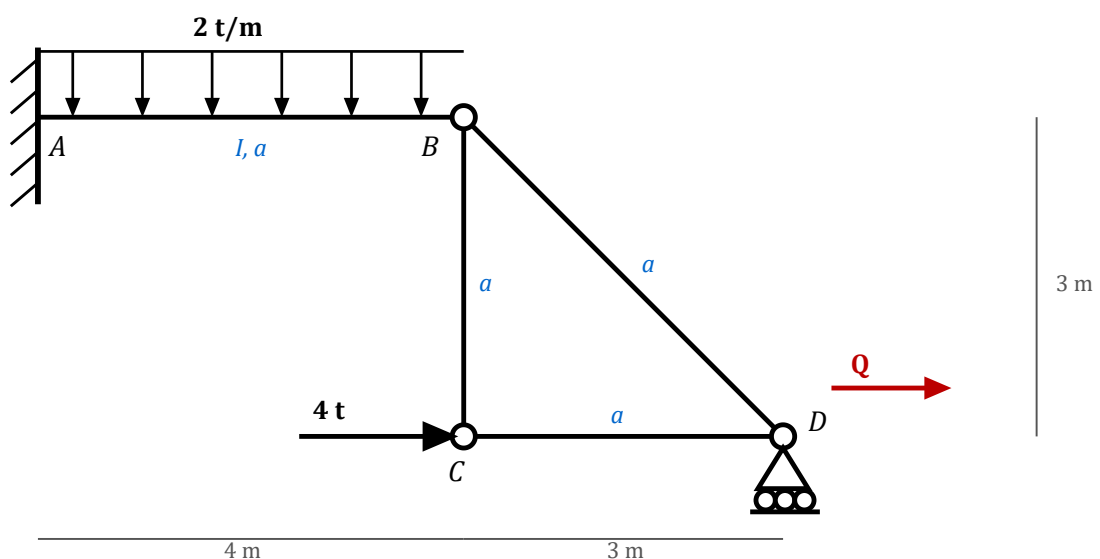
$$A_x = 0 \cdot A_y = C_y = 12,5 \text{ kN } \uparrow \cdot B_y = 55 \text{ kN } \uparrow$$

Chequeo contra la clase 1. Este es el ejercicio que el profesor dice que ya resolvieron por otro método. En forma general: $A_y = C_y = 5P/16$ y $B_y = 11P/8$, con momento en el apoyo central $M_B = -3PL'/16 = -3(40)(4)/16 = -30 \text{ kN}\cdot\text{m}$ (siendo $L' = 4 \text{ m}$ la luz de cada tramo). Son exactamente los valores de tabla para una viga continua de dos tramos iguales con carga puntual al centro de cada uno — si tu resultado de la primera semana coincide, quedó bien.

Problema 2 — Desplazamiento horizontal del nodo D

4 pts

Considerar solo deformaciones por flexión ($EI = 1200 \text{ t}\cdot\text{m}^2$) y axial ($aE = 400 \text{ t}$). Miembro AB: **I y a**. Miembros BC, CD, BD: **solo a**.



Estructura con la carga ficticia Q agregada en D (horizontal, hacia la derecha).

① La carga ficticia Q

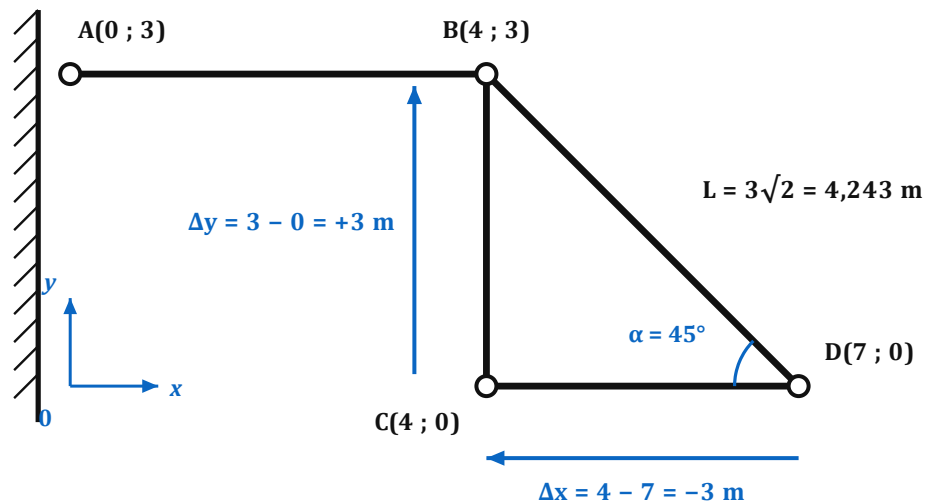
En D no hay carga horizontal aplicada, así que hay que **inventar** una: Q horizontal hacia la derecha. Al final se hace $Q = 0$.

$$\begin{aligned}\delta_{D,\text{horiz}} &= \partial U / \partial Q \big|_{Q=0} \\ &= \sum N \cdot (\partial N / \partial Q) \cdot L / (aE) + \sum (1/EI) \int M \cdot (\partial M / \partial Q) dx\end{aligned}$$

② Estática — nudo por nudo (las barras son de dos fuerzas)

Primero la geometría: de dónde salen las coordenadas

Una barra de dos fuerzas solo puede cargar fuerza **a lo largo de su propio eje**. Las barras CB y CD son vertical y horizontal, así que sus fuerzas ya vienen partidas. Pero **BD está inclinada**: su fuerza no es ni horizontal ni vertical, y para meterla en ΣF_x y ΣF_y hay que partirla en dos. Eso es todo lo que hacen las coordenadas.



Coordenadas de los nudos. El vector de la diagonal se arma yendo de D a B: 3 m a la izquierda y 3 m hacia arriba. El origen da igual — solo importa la resta.

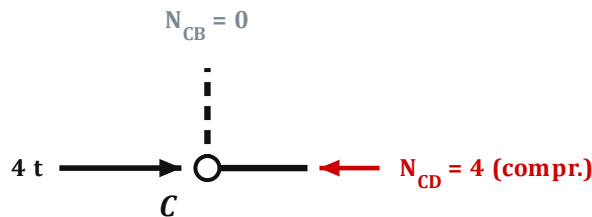
Los cuatro pasos, siempre iguales

- 1) Coordenadas de los dos extremos: D(7 ; 0) B(4 ; 3)
- 2) Vector de D a B = DESTINO - ORIGEN:
 $B - D = (4 - 7 ; 3 - 0) = (-3 ; +3)$
 Se lee: "de D a B camino 3 m a la izquierda y 3 m hacia arriba".
- 3) Longitud (Pitágoras, es la longitud real de la barra):
 $L = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} = 4,243 \text{ m}$
- 4) Vector unitario = vector ÷ su longitud:
 $u = (-3 ; 3) / 3\sqrt{2} = (-1/\sqrt{2} ; +1/\sqrt{2}) = (-0,707 ; +0,707)$

Ese unitario es la **receta de reparto** de la barra: por cada 1 t de fuerza que lleve BD, 0,707 t son horizontales y 0,707 t son verticales. Como sube 3 m en 3 m, la barra está a 45° — es el ángulo α que aparece marcado en la figura del enunciado, y por eso las dos componentes salen iguales.

El origen no importa. Puedes ponerlo en A, en C o donde quieras: como el vector es una **resta** de dos puntos, el origen se cancela. Lo único que no puede cambiar es el orden — de D a B es B menos D, no al revés.

Nudo C — barras CB (vertical) y CD (horizontal) + carga 4 t →



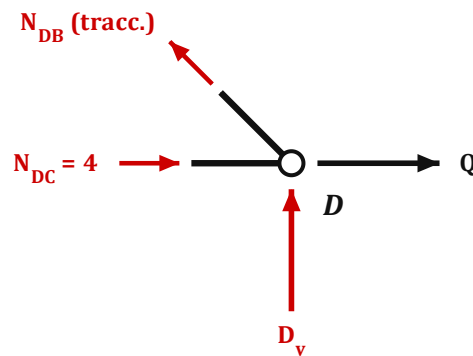
Nudo C: la carga de 4 t es horizontal y CB es la única barra vertical, así que a CB no le queda nada que equilibrar → es una **BARRA NULA**.

$$\Sigma F_y = 0 : N_{CB} = 0 \rightarrow \text{BARRA NULA}$$

$$\Sigma F_x = 0 : N_{CD} + 4 = 0 \rightarrow N_{CD} = -4 \text{ t (COMPRESIÓN)}$$

La única fuerza vertical que puede aparecer en C es la de CB, y no hay nada que la equilibre → CB es nula. Y como los 4 t empujan a C hacia D, la barra CD queda aplastada: por eso sale con signo negativo.

Nudo D — barras DC y DB + carga Q → + reacción D_y



Nudo D: D_y se dibuja hacia ARRIBA (positiva supuesta). El resultado sale negativo → en realidad va hacia abajo.

Convenio: **N positivo = tracción = la barra JALA al nudo** hacia el otro extremo. Como DB está traccionada, jala a D hacia B, o sea justo en la dirección $u = (-1/\sqrt{2} ; +1/\sqrt{2})$. Por eso

aporta $-N_{DB}/\sqrt{2}$ en x y $+N_{DB}/\sqrt{2}$ en y.

$$\Sigma F_x = 0 : -N_{DC} - N_{DB}/\sqrt{2} + Q = 0$$

$$4 - N_{DB}/\sqrt{2} + Q = 0 \quad (\text{porque } N_{DC} = -4)$$

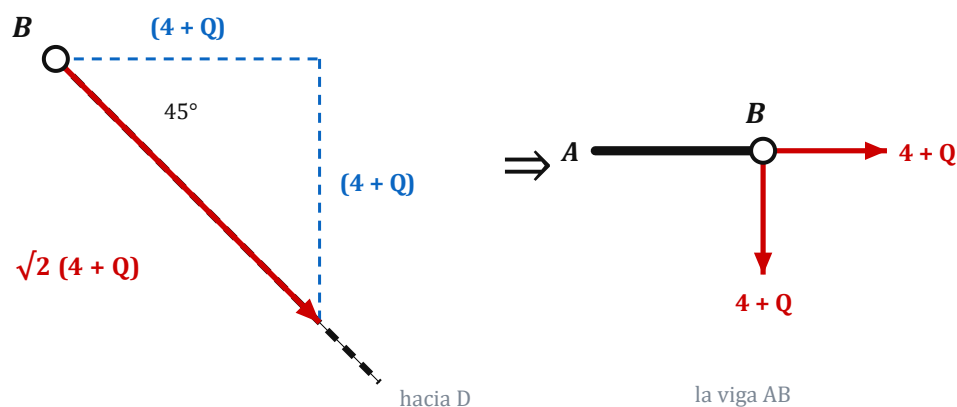
$$N_{DB} = \sqrt{2} (4 + Q) \quad (\text{TRACCIÓN})$$

$$\Sigma F_y = 0 : N_{DB}/\sqrt{2} + D_y = 0$$

$$D_y = -(4 + Q) \rightarrow 4 + Q \text{ hacia abajo}$$

D_y se **dibuja hacia arriba** (positiva supuesta) y sale con signo negativo: eso no es un error, significa que el rodillo en realidad empuja hacia abajo. Se deja el signo y ya.

Nudo B — qué le llega a la viga AB



Nudo B: la diagonal traccionada JALA a B hacia D. Esa fuerza, partida en sus dos componentes, es exactamente lo que carga la viga AB.

Aquí no hay que calcular nada nuevo: es **la misma barra BD** vista por el otro extremo. Una barra traccionada jala a sus dos nudos *hacia adentro*, así que en B jala hacia D — dirección opuesta a la de antes: $u_B = (+1/\sqrt{2} ; -1/\sqrt{2})$. Eso es acción y reacción.

$$\sqrt{2}(4+Q) \cdot (1/\sqrt{2} ; -1/\sqrt{2}) = ((4+Q) ; -(4+Q))$$

En B: $(4 + Q)$ horizontal $\rightarrow$ y $(4 + Q)$ vertical $\downarrow$

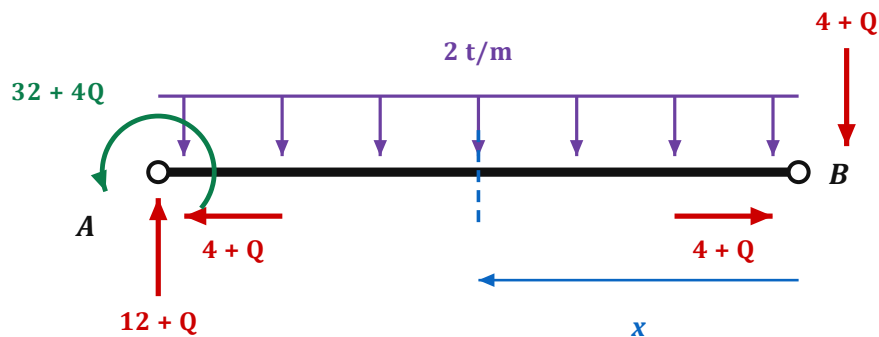
El $\sqrt{2}$ de la magnitud se cancela con el $1/\sqrt{2}$ del unitario — por eso los números salen redondos. Y tiene que dar así: las dos componentes son iguales porque la barra está a 45° .

Ojo con esto: la fuerza horizontal $(4+Q)$ es la que **tracciona la viga AB** (por eso AB tiene "a"), y la vertical $(4+Q)$ es la que la **flexiona** junto con los 2 t/m.

③ EL DESPIECE — cuerpo libre de cada barra

Se corta cada barra y se dibuja su cuerpo libre con las fuerzas de extremo **en función de Q**. Las fuerzas pasan de una pieza a la vecina por **acción y reacción** (misma magnitud, sentido contrario) y cada pieza cierra su propio equilibrio. En el dibujo: **rojo** = fuerzas de extremo, **verde** = momentos, **morado** = carga distribuida, **azul** = el corte y su variable.

① Barra AB *la viga — única con inercia* **I, a — flexión + axial**



Equilibrio de la barra

$$\Sigma F_x: -(4+Q) + (4+Q) = 0 \quad \checkmark$$

$$\Sigma F_y: (12+Q) - 2(4) - (4+Q) = 0 \quad \checkmark$$

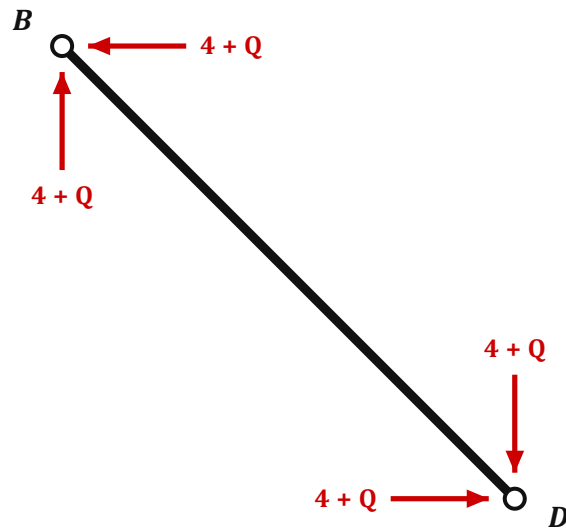
$$\Sigma M_B: (32+4Q) - (12+Q)4 + 2(4)(2) = 0 \quad \checkmark$$

Corte a x del extremo B (trozo de la derecha)

$$\begin{aligned} \text{AXIAL} \quad N &= 4 + Q & (\text{TRACCIÓN}) \\ \partial N / \partial Q &= 1 & L = 4 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{FLEXIÓN} \quad M &= (4+Q) \cdot x + 2 \cdot x \cdot (x/2) \\ &= (4 + Q) \cdot x + x^2 \\ \partial M / \partial Q &= x \end{aligned}$$

② Barra BD *la diagonal* **2F — solo axial** **TRACCIÓN**



Las fuerzas de extremo salen HACIA AFUERA → traccionada.

Componentes en cada extremo:

$(4+Q)$ horizontal y $(4+Q)$ vertical

Resultante a lo largo del eje:

$$N = \sqrt{[(4+Q)^2 + (4+Q)^2]} = \sqrt{2} (4 + Q)$$

AXIAL $N = \sqrt{2} (4 + Q)$ (TRACCIÓN)

$$\partial N / \partial Q = \sqrt{2}$$

$$L = 3\sqrt{2} = 4,243 \text{ m}$$

FLEXIÓN no tiene (barra "a")

③ Barra CD sale del cálculo

2F — solo axial

COMPRESIÓN

$\partial / \partial Q = 0 \rightarrow$ fuera



Las fuerzas de extremo entran HACIA ADENTRO → comprimida.

AXIAL $N = -4 \text{ t}$ (COMPRESIÓN)

$\partial N / \partial Q = 0 \rightarrow$ no depende de Q

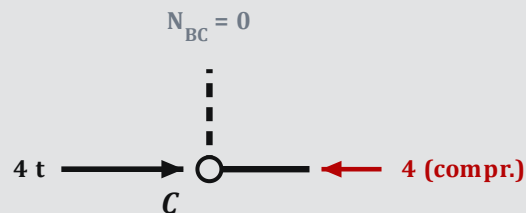
⇒ **NO CONTRIBUYE** al desplazamiento.

Carga, pero su energía no cambia cuando cambia Q.

④ **Barra BC** nula — se prueba en el nudo C

2F — solo axial

$N = 0$ · barra nula



Su cuerpo libre está **vacío**: no hay fuerza en ningún extremo. Por eso lo que se muestra es el **nudo C**, que es donde se demuestra:

En C concurren solo BC (vertical) y CD (horizontal), y la carga externa de 4 t es **horizontal**. La única fuerza vertical posible en ese nudo es la de BC:

$$\Sigma F_y = 0 \text{ en C} \rightarrow N_{BC} = 0$$

AXIAL $N = 0$ (BARRA NULA)
 $\partial N / \partial Q = 0$ $\rightarrow$ **NO CONTRIBUYE**

④ Evaluar en $Q = 0$ e integrar

Aporte AXIAL — $\sum N \cdot (\partial N / \partial Q) \cdot L / (aE)$

BARRA	N (Q=0)	$\partial N / \partial Q$	L (M)	$N \cdot (\partial N / \partial Q) \cdot L$
AB	4	1	4	16
BD	$4\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$24\sqrt{2} = 33,941$
CD	-4	0	3	0
BC	0	0	3	0
Σ				$16 + 24\sqrt{2} = 49,941 \text{ T}\cdot\text{M}$

$$\delta_{\text{axial}} = 49,941 / 400 = 0,124853 \text{ m}$$

Aporte FLEXIÓN — $(1/EI) \int M \cdot (\partial M / \partial Q) dx$

El cuadro en el formato del profesor (el del problemario, pág. 800):

MIEMBRO	M(X)	$\partial M/\partial Q$	M(X) CON Q = 0	L (M)	$\int M \cdot (\partial M/\partial Q) \, DX$
AB	$(4+Q)x + x^2$	x	$4x + x^2$	4	$\int_0^4 (4x^2 + x^3) \, dx = \mathbf{448/3}$
BD, CD, BC	barras «a» — sin inercia				0
Σ					149,333 T·M³

$$\begin{aligned} (1/EI) \int_0^4 (4x + x^2)(x) dx &= (1/EI) [4x^3/3 + x^4/4]_0^4 \\ &= (1/EI) [256/3 + 64] = 448/3 / EI \end{aligned}$$

$$\delta_{\text{flexión}} = 149,333 / 1200 = 0,124444 \text{ m}$$

⑤ Suma

$$\delta_D = 0,124444 + 0,124853 = 0,249297 \text{ m}$$

RESPUESTA PROBLEMA 2

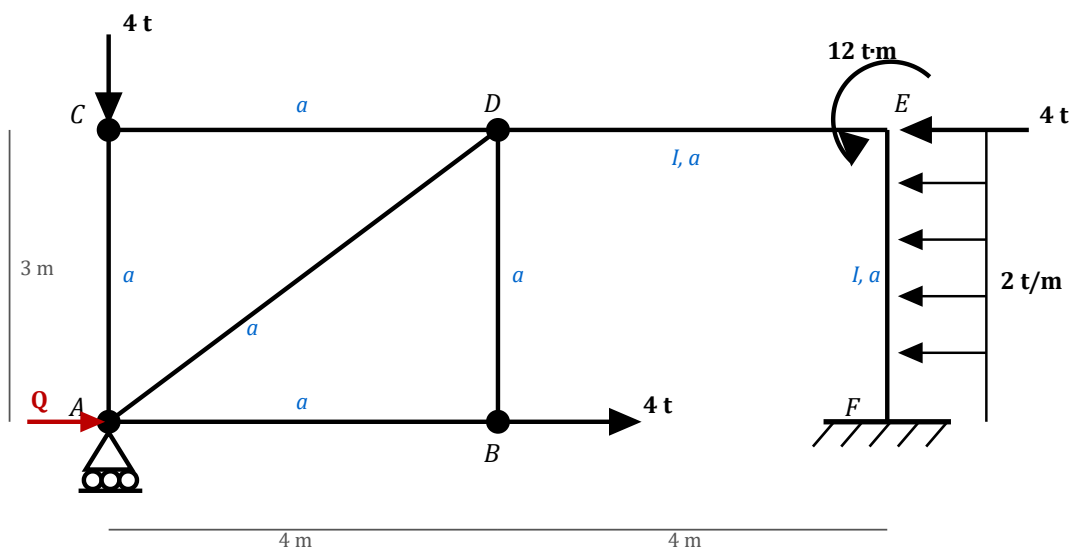
$$\delta_{D,\text{horizontal}} = 0,2493 \text{ m} \approx 24,93 \text{ cm} \rightarrow (\text{hacia la derecha, en el sentido de } Q)$$

Flexión 0,1244 m (49,9 %) + Axial 0,1249 m (50,1 %) — aquí los dos efectos pesan casi igual.

Problema 3 — Desplazamiento horizontal del nodo A

6 pts

Considerar solo flexión ($EI = 12600 \text{ t}\cdot\text{m}^2$) y axial ($aE = 3150 \text{ t}$). Miembros DE y EF: **I y a**.
Miembros AC, CD, AD, AB, BD: **solo a**.



Carga ficticia Q horizontal en A (hacia la derecha). El momento de 12 t·m en E es **antihorario**.

⚠ **Verifica esto contra tu PDF antes de copiar:** leí el momento en E como **antihorario** (la punta de la flecha queda abajo-izquierda de E apuntando hacia abajo). Es el único dato del enunciado que depende de interpretar un dibujo, y cambia el resultado: si fuera **horario**, el resultado sería $\delta_A = 0,0429 \text{ m}$ en vez de 0,0172 m. El aporte axial (0,01714 m) es el mismo en ambos casos.

① La carga ficticia Q

A es un rodillo $\rightarrow$ puede moverse horizontalmente, y ahí no hay carga horizontal. Se pone Q horizontal $\rightarrow$ en A y al final $Q = 0$.

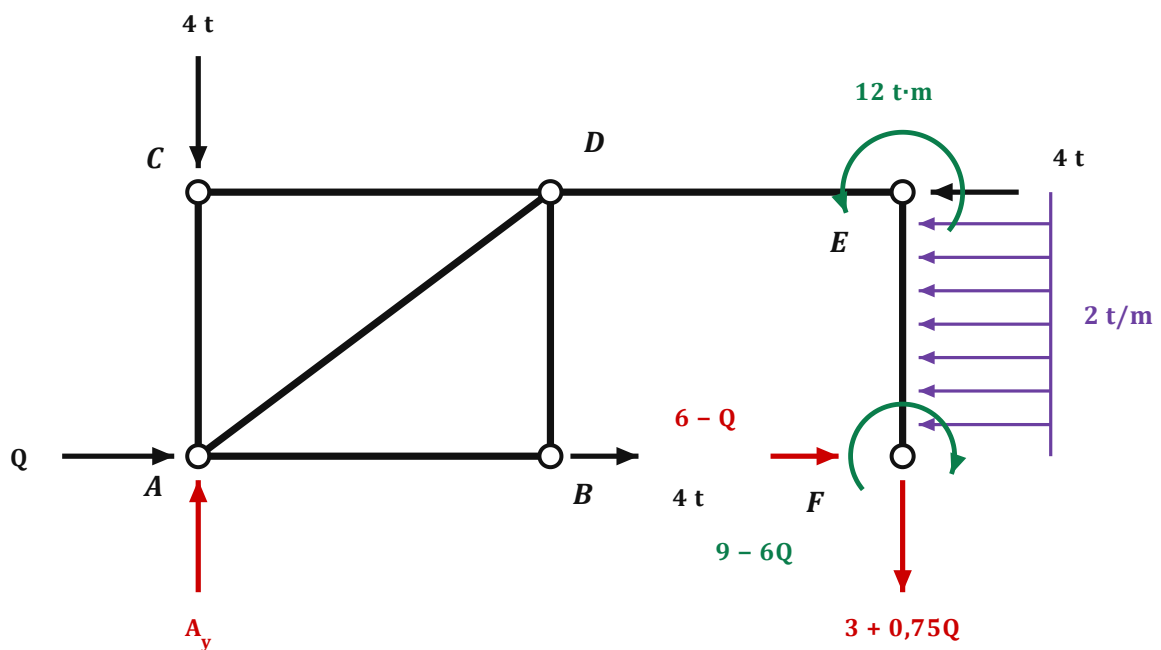
② Estática — primero los cuerpos libres, después los nudos

✦ **Lo que confirmó el profesor: el panel A-B-D-C es una CHAPA.** Los cuatro puntos son nudos y el conjunto (4 nudos + 5 barras: AC, CD, AD, AB, BD) **está triangulado**, así que no es un mecanismo: se comporta como **un solo cuerpo rígido** — una chapa. Comprobación: $b + r = 2n \rightarrow 5 + 3 = 8 = 2(4) \checkmark$ (los 3 son A_y del rodillo más las 2 componentes del pasador en D). Una chapa tiene 3 grados de libertad y está sujeta por exactamente 3 componentes $\rightarrow$ **isostática**.

Ojo con lo que NO significa: «chapa» describe la *cinemática* (que el panel es rígido, que no se desarma), **no** que sea infinitamente rígido. Sus barras siguen deformándose axialmente — por eso cada una lleva su «a» en la figura. Si el panel no se deformara, la barra AD no aportaría nada y el resultado bajaría a 0,0073 m; pero entonces no tendría sentido que el enunciado le asigne área.

1 · Cuerpo libre de toda la estructura

Antes de tocar un solo nudo, el cuerpo libre completo — con **todas** las cargas y **todas** las reacciones dibujadas:

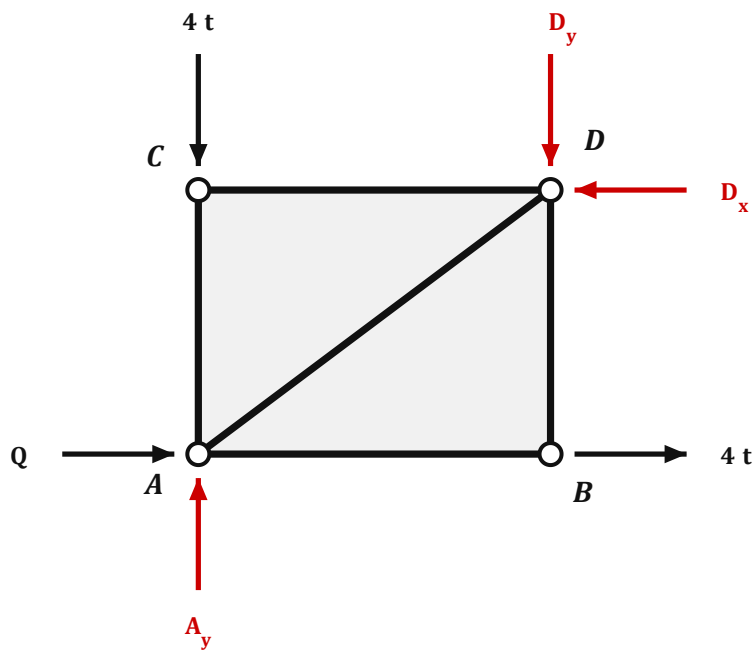


DCL de toda la estructura. Hay 4 incógnitas de apoyo (A_y , F_x , F_y , M_F) y solo 3 ecuaciones $\rightarrow$ con esto **no alcanza**: hay que cortar.

Incógnitas de apoyo: A_y (rodillo) · F_x , F_y , M_F (empotramiento) = 4
Ecuaciones de estática: = 3

No alcanza. Falta una ecuación, y sale de **cortar la estructura en D**. El corte es legítimo porque en D hay un **pasador**: pasa fuerzas pero **no pasa momento**, y esa es justamente la ecuación que falta.

2 · Cuerpo libre de la CHAPA A-B-D-C



DCL de la CHAPA sola. D_x y D_y son las dos incógnitas que pasa el pasador; **momento no pasa**. Al tomar momento EN D su brazo vale cero y se van las dos $\rightarrow A_y$ sale sola.

Sobre la chapa actúan **seis** fuerzas y nada más: las tres cargas de su lado ($4\text{ t} \downarrow$ en C, $4\text{ t} \rightarrow$ en B, $Q \rightarrow$ en A), la reacción del rodillo A_y , y las dos que le pasa el pórtico por el pasador de D, que **todavía no conocemos** — las llamamos D_x y D_y y las dibujamos en el sentido que suponemos.

Dos cosas que hay que justificar antes de escribir nada:

- **A es un rodillo** $\rightarrow$ solo da reacción **vertical**, no hay A_x . Justo por eso A se puede mover en horizontal, y por eso tiene sentido meterle ahí la carga ficticia Q.
- **D es un pasador** $\rightarrow$ pasa **dos fuerzas y ningún momento**. Esa es la ecuación que le faltaba a la estática global.

Tres incógnitas (A_y , D_x , D_y) y tres ecuaciones. Se empieza por el momento **en D**, porque ahí las dos del pasador tienen brazo cero y se van solas:

$$\Sigma M_D = 0 \quad (\text{antihorario } +, D \text{ en } (4;3)):$$

$$4\text{ t} \downarrow \text{ en C} \quad \rightarrow \quad \text{brazo horizontal } 4\text{ m} \quad \rightarrow \quad + 4(4) = +16$$

$$4\text{ t} \rightarrow \text{ en B} \quad \rightarrow \quad \text{brazo vertical } 3\text{ m} \quad \rightarrow \quad + 4(3) = +12$$

$$Q \rightarrow \text{ en A} \quad \rightarrow \quad \text{brazo vertical } 3\text{ m} \quad \rightarrow \quad + 3Q$$

$$A_y \uparrow \text{ en A} \quad \rightarrow \quad \text{brazo horizontal } 4\text{ m} \quad \rightarrow \quad - 4A_y$$

$$D_x, D_y \text{ en D} \quad \rightarrow \quad \text{brazo CERO} \quad \rightarrow \quad 0 \quad \leftarrow \text{por eso se van}$$

$$16 + 12 + 3Q - 4A_y = 0 \quad \rightarrow \quad A_y = (28 + 3Q)/4 = 7 + 0,75 Q \uparrow$$

Ya con A_y , las otras dos ecuaciones dan las fuerzas del pasador:

$$\Sigma F_x = 0 \quad (\rightarrow \text{positivo}) :$$

$$Q + 4 - D_x = 0 \quad \rightarrow \quad D_x = 4 + Q$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad (\uparrow \text{positivo}) :$$

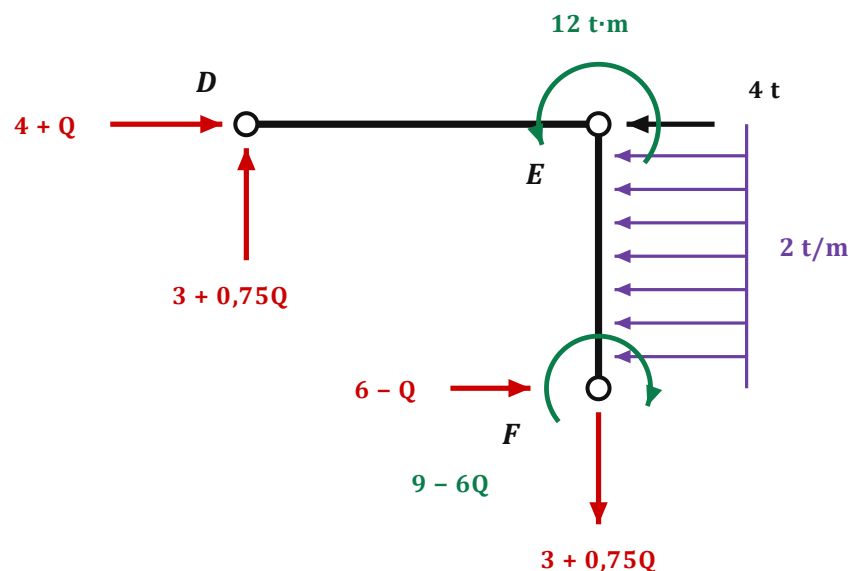
$$A_y - 4 - D_y = 0$$

$$(7 + 0,75Q) - 4 - D_y = 0 \quad \rightarrow \quad D_y = 3 + 0,75 Q$$

Las dos salieron **positivas** $\rightarrow$ el sentido que supusimos en el dibujo era el correcto: sobre la chapa van $(4+Q) \leftarrow$ y $(3+0,75Q) \downarrow$.

Y por **acción y reacción**, la chapa le entrega al pórtico en D lo mismo con el sentido contrario: $(4 + Q) \rightarrow$ y $(3 + 0,75Q) \uparrow$. Eso es exactamente lo que entra en el cuerpo libre de abajo.

3 · Cuerpo libre del pórtico D-E-F



DCL del pórtico DEF — el otro lado del corte. En D recibe lo mismo pero al revés (acción y reacción). Con esto salen las tres reacciones de F.

El otro lado del corte. En D recibe lo mismo pero con el sentido contrario (acción y reacción), y con eso las tres reacciones del empotramiento salen directo:

$$\Sigma F_x = 0 : (4+Q) - 4 - 6 + F_x = 0 \rightarrow F_x = 6 - Q \rightarrow$$

$$\Sigma F_y = 0 : (3 + 0,75Q) + F_y = 0 \rightarrow F_y = 3 + 0,75Q \downarrow$$

$$\Sigma M_F = 0 : M_F = 9 - 6Q \text{ horario}$$

(el -6 de ΣF_x es la resultante de la distribuida: $2 \text{ t/m} \times 3 \text{ m}$, hacia la izquierda)

Comprobación con $Q = 0$ (hazla, el profesor la valora): $A_y = 7 \text{ t} \uparrow \cdot F_x = 6 \text{ t} \rightarrow \cdot F_y = 3 \text{ t} \downarrow \cdot M_F = 9 \text{ t-m horario}$. $\Sigma F_x: 4 - 4 - 6 + 6 = 0 \checkmark \cdot \Sigma F_y: 7 - 4 - 3 = 0 \checkmark$

4 · Ahora sí, nudo por nudo — hace falta N_{AD}

Las reacciones no bastan: Castigliano necesita la **fuerza en cada barra**, y de la chapa la única que depende de Q es **AD**. Eso solo sale abriendo los nudos.

Nudo C — barras CA (vertical) y CD (horizontal) + $4 \text{ t} \downarrow$

$$\Sigma F_x = 0 : N_{CD} = 0 \rightarrow \text{BARRA NULA}$$

$$\Sigma F_y = 0 : -N_{CA} - 4 = 0 \rightarrow N_{CA} = -4 \text{ t (COMPRESIÓN)}$$

Nudo B — barras BA (horizontal) y BD (vertical) + $4 \text{ t} \rightarrow$

$$\Sigma F_y = 0 : N_{BD} = 0 \rightarrow \text{BARRA NULA}$$

$$\Sigma F_x = 0 : -N_{BA} + 4 = 0 \rightarrow N_{BA} = 4 \text{ t (TRACCIÓN)}$$

Nudo A — barras AC ($\uparrow$), AB ($\rightarrow$), AD (diagonal 3-4-5) + reacción A_y + carga Q

Dirección de AD: de A(0;0) a D(4;3) $\rightarrow (4;3)/5 = (0,8 ; 0,6)$

$$\Sigma F_x = 0 : 0,8 \cdot N_{AD} + N_{AB} + Q = 0$$

$$0,8 \cdot N_{AD} + 4 + Q = 0$$

$$N_{AD} = -1,25 (4 + Q) \text{ (COMPRESIÓN)}$$

$$\Sigma F_y = 0 : N_{AC} + 0,6 \cdot N_{AD} + A_y = 0$$

$$-4 + 0,6(-1,25)(4+Q) + A_y = 0$$

$$A_y = 7 + 0,75 Q \uparrow$$

Fíjate que A_y salió dos veces: por el cuerpo libre de la chapa (ΣM_D , una línea) y otra vez aquí por el nudo A, y dan lo mismo — $7 + 0,75Q$. Esa es la comprobación de que la estática está bien. En el examen conviene el orden de arriba: la chapa para las reacciones, y después los nudos **solo** para las fuerzas de barra que Castigliano necesita.

③ EL DESPIECE — cuerpo libre de cada barra

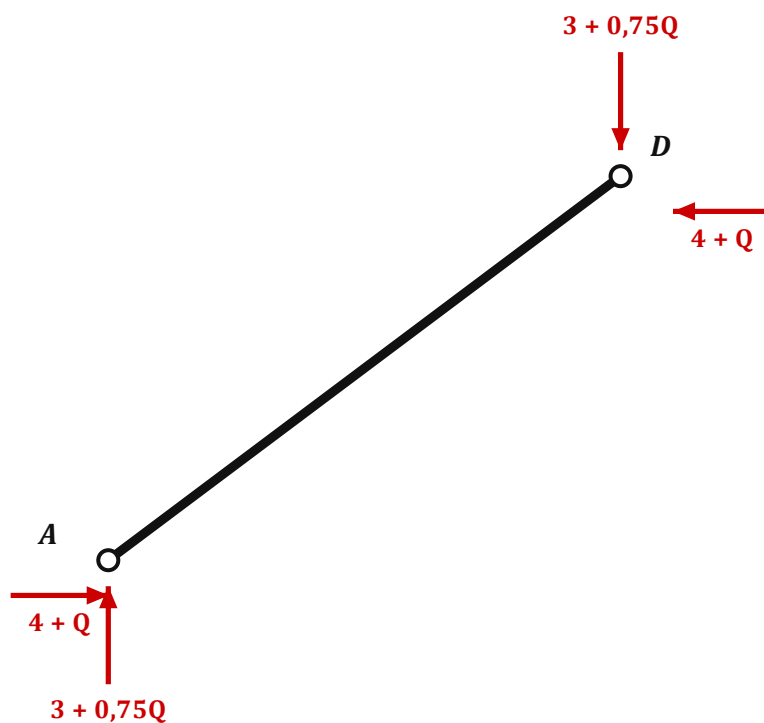
Se corta cada barra y se dibuja su cuerpo libre con las fuerzas de extremo **en función de Q** . Las fuerzas pasan de una pieza a la vecina por **acción y reacción** (misma magnitud, sentido contrario) y cada pieza cierra su propio equilibrio. En el dibujo: **rojo** = fuerzas de extremo, **verde** = momentos, **morado** = carga distribuida, **azul** = el corte y su variable.

Siete barras, pero **solo tres dependen de Q** (AD, DE y EF): esas son las que se integran. Las otras cuatro se dibujan igual — hay que **mostrar** que $\partial/\partial Q = 0$, no asumirlo.

① **Barra AD** la única barra "a" que depende de Q

2F — solo axial

COMPRESIÓN



Fuerzas de extremo HACIA ADENTRO → comprimida.

Diagonal 3-4-5: $\cos = 0,8$ $\text{sen} = 0,6$ $L = 5 \text{ m}$

Componentes: $(4+Q)$ horizontal, $(3+0,75Q)$ vertical

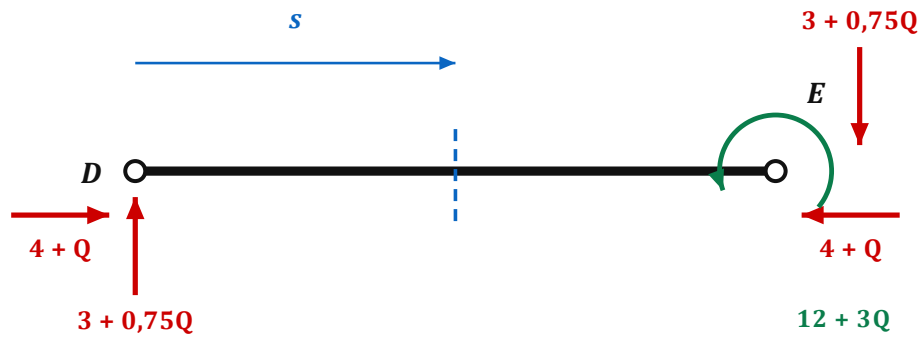
$N = -(4+Q)/0,8 = -1,25 (4 + Q)$

AXIAL $N = -1,25 (4 + Q)$ (COMPRESIÓN)

$\partial N / \partial Q = -1,25$ $L = 5 \text{ m}$

Con $Q = 0$: $N = -5 \text{ t}$

② Barra DE *viga superior* I, a — flexión + axial



Corte a s del extremo D (trozo de la izquierda)

AXIAL $N = -(4 + Q)$ (COMPRESIÓN)

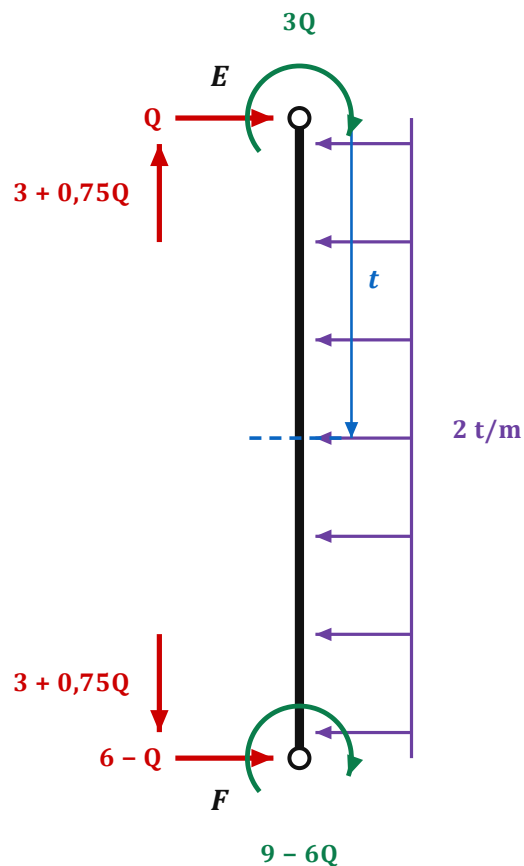
$\partial N / \partial Q = -1$ $L = 4 \text{ m}$

FLEXIÓN $M = (3 + 0,75Q) \cdot s = 0,75(4+Q) \cdot s$

$\partial M / \partial Q = 0,75 s$

Chequeo: en $s = 4 \rightarrow M = 12 + 3Q$, que es justo el momento de extremo en E. ✓

③ Barra EF *columna empotrada en F* I, a — flexión + axial



Ojo con este. En el nudo E los $4\text{ t} \leftarrow$ y el momento de $12\text{ t}\cdot\text{m}$ $\curvearrowright$ ya se descontaron contra lo que trae DE. Lo que entra a la columna por arriba es Q y $3Q$: cero cuando $Q = 0$, pero **su derivada NO es cero**. Ahí está todo el efecto de la flexión.

Corte a t desde E hacia abajo (trozo de arriba)

AXIAL $N = 3 + 0,75Q = 0,75(4+Q)$ (TRACCIÓN)
 $\partial N / \partial Q = 0,75$ $L = 3\text{ m}$

FLEXIÓN $M = t^2 - Q(3 + t)$
 $\partial M / \partial Q = -(3 + t)$

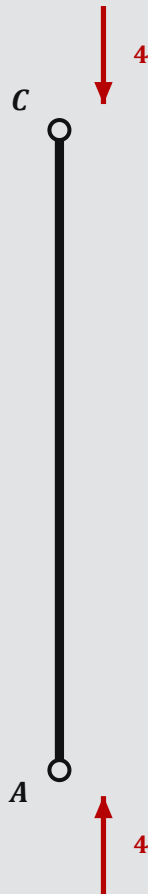
Con $Q = 0$: $M = t^2$ (la distribuida sola)

④ Barra AC sale del cálculo

2F — solo axial

COMPRESIÓN

$\partial / \partial Q = 0 \rightarrow$ fuera



Recibe directo los 4 t que bajan por C.
Fuerzas hacia adentro → comprimida.

AXIAL $N = -4 \text{ t}$ (COMPRESIÓN)
 $\partial N / \partial Q = 0 \rightarrow$ NO CONTRIBUYE

⑤ Barra AB *sale del cálculo* 2F — solo axial TRACCIÓN $\partial / \partial Q = 0 \rightarrow$ fuera



Recibe directo los 4 t → aplicados en B.

Fuerzas hacia afuera → traccionada.

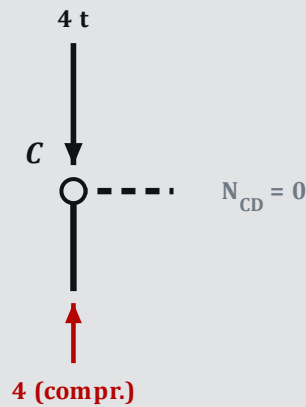
AXIAL $N = +4 \text{ t}$ (TRACCIÓN)

$\partial N / \partial Q = 0 \rightarrow$ NO CONTRIBUYE

⑥ Barra CD nula — se prueba en el nudo C

2F — solo axial

$N = 0 \cdot$ barra nula



Cuerpo libre de la barra: **vacío**, sin fuerzas en los extremos. La prueba está en el **nudo C**:

En C concurren solo CA (vertical) y CD (horizontal), y la carga externa de 4 t es **vertical**. La única fuerza horizontal posible en ese nudo es la de CD:

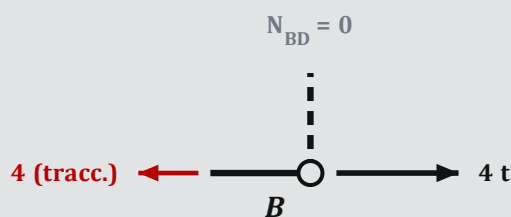
$$\Sigma F_x = 0 \text{ en C} \rightarrow N_{CD} = 0$$

AXIAL $N = 0 \rightarrow$ NO CONTRIBUYE

⑦ Barra BD nula — se prueba en el nudo B

2F — solo axial

$N = 0 \cdot$ barra nula



Cuerpo libre de la barra: **vacío**, sin fuerzas en los extremos. La prueba está en el **nudo B**:

En B concurren solo BA (horizontal) y BD (vertical), y la carga externa de 4 t es **horizontal**. La única fuerza vertical posible en ese nudo es la de BD:

$$\Sigma F_y = 0 \text{ en B} \rightarrow N_{BD} = 0$$

AXIAL $N = 0 \rightarrow$ **NO CONTRIBUYE**

④ Evaluar en $Q = 0$ e integrar

Aporte AXIAL — $\Sigma N \cdot (\partial N / \partial Q) \cdot L / (aE)$

BARRA	N (Q=0)	$\partial N / \partial Q$	L (M)	$N \cdot (\partial N / \partial Q) \cdot L$
AD	-5	-1,25	5	31,25
DE	-4	-1	4	16
EF	3	0,75	3	6,75
AC, CD, AB, BD	—	0	—	0
Σ				54 T·M

$$\delta_{axial} = 54 / 3150 = 0,0171429 \text{ m}$$

Aporte FLEXIÓN — $(1/EI) \int M \cdot (\partial M / \partial Q) dx$

Criterio de signos. En cada barra M se escribe con el sentido que sale de *su propio* cuerpo libre, y $\partial M / \partial Q$ se deriva de **esa misma** expresión. Con eso basta: si a una barra se le invirtiera el criterio, M

y $\partial M/\partial Q$ cambian de signo **a la vez** y el producto $M \cdot (\partial M/\partial Q)$ queda igual. Lo que **no** se puede es mezclar criterios *dentro* de una misma barra.

El cuadro en el formato del profesor (el del problemario, pág. 800):

MIEMBRO	M(X)	$\partial M/\partial Q$	M(X) CON Q = 0	L (M)	$\int M \cdot (\partial M/\partial Q) DX$
DE	$0,75(4+Q) \cdot s$	$0,75 \text{ s}$	3 s	4	$\int_0^4 2,25 \text{ s}^2 ds = +48$
EF	$t^2 - Q(3+t)$	$-(3+t)$	t^2	3	$-\int_0^3 (3t^2 + t^3) dt = -47,25$
AD, AC, AB, CD, BD	barras «a» — sin inercia				0
Σ					$0,75 \text{ T} \cdot \text{M}^3$

Barra DE:

$$\int_0^4 (3s)(0,75 \text{ s}) ds = 2,25 \int_0^4 s^2 ds = 2,25 (64/3) = +48$$

Barra EF:

$$\begin{aligned} \int_0^3 (t^2) \cdot (-(3+t)) dt &= -\int_0^3 (3t^2 + t^3) dt \\ &= -[t^3 + t^4/4]_0^3 \\ &= -(27 + 20,25) = -47,25 \end{aligned}$$

$$\Sigma = 48 - 47,25 = 0,75 \text{ t} \cdot \text{m}^3$$

$$\delta_{\text{flexión}} = 0,75 / 12600 = 0,0000595 \text{ m}$$

⑤ Suma

$$\delta_A = 0,0171429 + 0,0000595 = 0,0172024 \text{ m}$$

RESPUESTA PROBLEMA 3

$$\delta_{A,\text{horizontal}} = 0,01720 \text{ m} \approx 1,72 \text{ cm} \rightarrow (\text{hacia la derecha, en el sentido de Q})$$

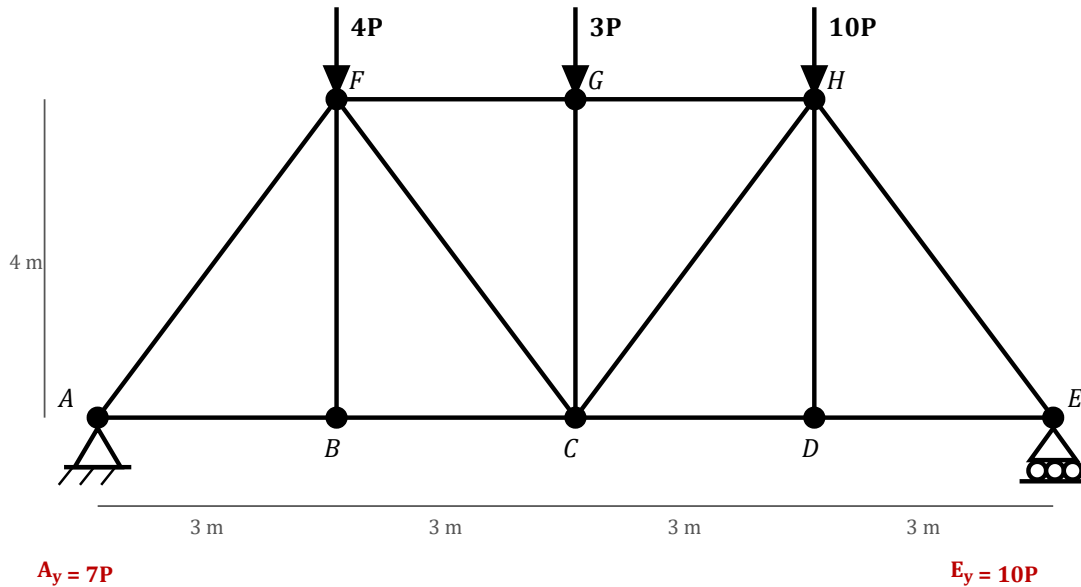
Axial 0,017143 m (99,7 %) + Flexión 0,0000595 m (0,3 %).

Detalle que vale la pena comentar en la hoja: los dos aportes de flexión casi se cancelan (+48 de DE contra -47,25 de EF) porque el momento de 12 t·m antihorario contrarresta casi exactamente la flexión que mete la barra DE. Por eso aquí **manda la deformación axial**, al revés del problema 2 donde iban mitad y mitad. Que el resultado de flexión salga chiquito no es un error: es el momento aplicado haciendo su trabajo.

Problema 4 — Carga máxima P (armadura W250×80)

6 pts

Perfiles W250×80, acero $E = 200 \text{ GPa}$, $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$. FS = 1,75 contra cedencia y FS = 3 contra pandeo. Usar σ_y como valor máximo de la tensión crítica. Construir tabla de fuerzas indicando tracción o compresión.



Armadura de 12 m de luz y 4 m de altura. Diagonales AF, FC, CH, HE; montantes BF, CG, DH.

① Reacciones

$$\sum M_A = 0 : E_y(12) = 4P(3) + 3P(6) + 10P(9) = 12P + 18P + 90P = 120P$$

$$E_y = 10P \uparrow$$

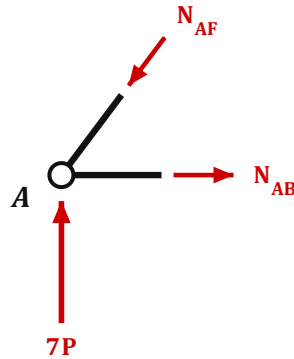
$$\sum F_y = 0 : A_y = 17P - 10P = 7P \uparrow$$

$$\sum F_x = 0 : A_x = 0$$

② EL DESPIECE — nudo por nudo

En armadura el despiece es el **cuerpo libre de cada nudo**. Flecha **saliendo** del nudo = la barra lo jala = **tracción**; flecha **entrando** = la barra lo empuja = **compresión**. Se arranca por un nudo con solo dos incógnitas y se avanza. Todas las diagonales son 3-4-5 $\rightarrow \cos = 0,6 \cdot \sin = 0,8$.

① Nudo A



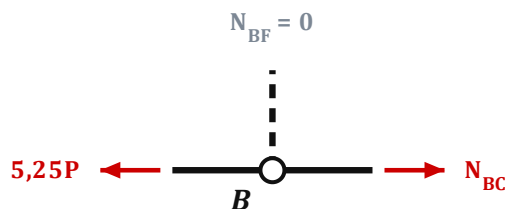
$$\Sigma F_y: 0,8 \cdot N_{AF} + 7P = 0$$

$$N_{AF} = -8,75P \quad (\text{compresión})$$

$$\Sigma F_x: N_{AB} + 0,6(-8,75P) = 0$$

$$N_{AB} = +5,25P \quad (\text{tracción})$$

② Nudo B

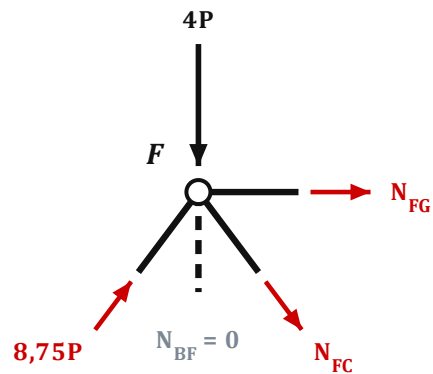


No hay carga externa y BF es la única vertical:

$$\Sigma F_y: N_{BF} = 0 \quad (\text{BARRA NULA})$$

$$\Sigma F_x: N_{BC} = 5,25P \quad (\text{tracción})$$

③ Nudo F



$$\Sigma F_y: 0,8(8,75P) - 0,8 \cdot N_{FC} - 4P = 0$$

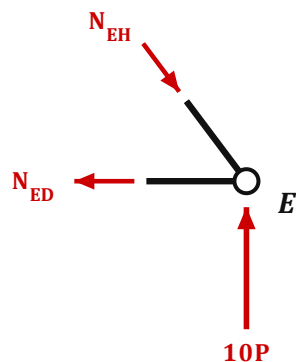
$$7P - 0,8 \cdot N_{FC} - 4P = 0$$

$$N_{FC} = +3,75P \quad (\text{tracción})$$

$$\Sigma F_x: 5,25P + N_{FG} + 0,6(3,75P) = 0$$

$$N_{FG} = -7,5P \quad (\text{compresión})$$

④ Nudo E



$$\Sigma F_y: 0,8 \cdot N_{EH} + 10P = 0$$

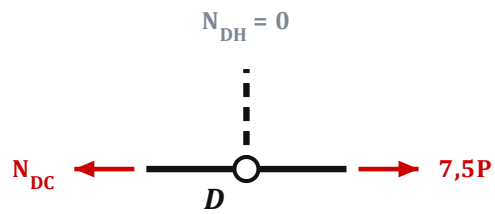
$$N_{EH} = -12,5P \quad (\text{compresión})$$

← la barra más cargada de toda la armadura

$$\Sigma F_x: -N_{ED} + 0,6(12,5P) = 0$$

$$N_{ED} = +7,5P \quad (\text{tracción})$$

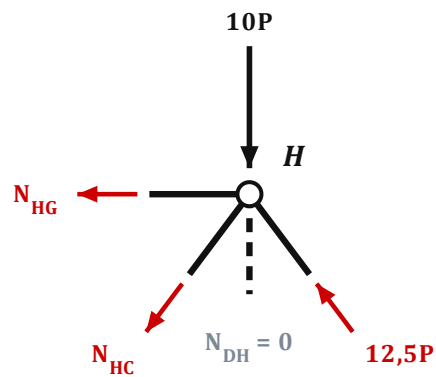
⑤ Nudo D



$$\Sigma F_y: N_{DH} = 0 \quad (\text{BARRA NULA})$$

$$\Sigma F_x: N_{DC} = 7,5P \quad (\text{tracción})$$

⑥ Nudo H



$$\Sigma F_y: 0,8(12,5P) - 0,8 \cdot N_{HC} - 10P = 0$$

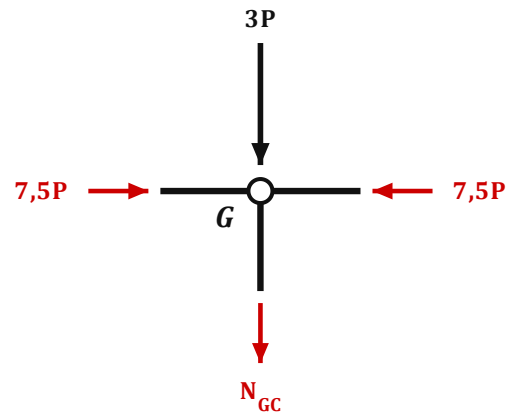
$$10P - 0,8 \cdot N_{HC} - 10P = 0$$

$$N_{HC} = 0 \quad (\text{BARRA NULA})$$

$$\Sigma F_x: -0,6(12,5P) - N_{HG} = 0$$

$$N_{HG} = -7,5P \quad (\text{compresión})$$

⑦ Nudo G

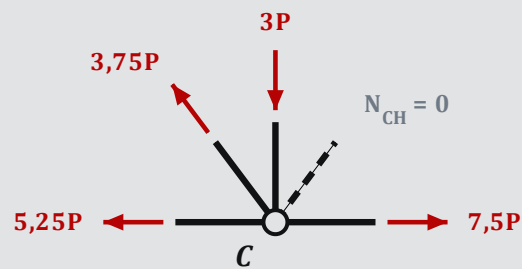


$$\Sigma F_y: -N_{GC} - 3P = 0$$

$$N_{GC} = -3P \quad (\text{compresión})$$

$$\Sigma F_x: 7,5P = 7,5P \quad \checkmark \quad (\text{ya cerraba solo})$$

⑧ Nudo C *comprobación final*



COMPROBACIÓN – nudo sobrante, todo ya conocido

$$\Sigma F_y: 0,8(3,75P) - 3P + 0,8(0)$$

$$= 3P - 3P = 0 \quad \checkmark$$

$$\Sigma F_x: -5,25P + 7,5P - 0,6(3,75P) + 0,6(0)$$

$$= -5,25P + 7,5P - 2,25P = 0 \quad \checkmark$$

Si esto no cerrara, hay un error aguas arriba.

③ Tabla de fuerzas (la que pide el enunciado)

MIEMBRO	L (M)	FUERZA	TIPO
AB	3	5,25 P	Tracción
BC	3	5,25 P	Tracción
CD	3	7,50 P	Tracción
DE	3	7,50 P	Tracción
FG	3	7,50 P	Compresión
GH	3	7,50 P	Compresión
BF	4	0	Nula
CG	4	3,00 P	Compresión
DH	4	0	Nula
AF	5	8,75 P	Compresión
FC	5	3,75 P	Tracción
CH	5	0	Nula
HE	5	12,50 P	Compresión ← la mayor

④ Propiedades del perfil W250×80 (tabla del enunciado)

$$A = 10\,200 \text{ mm}^2$$

$$I_x = 126 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad r_x = 111 \text{ mm}$$

$$I_y = 43,1 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad r_y = 65,0 \text{ mm} \quad \leftarrow r \text{ mínimo (por aquí pandea)}$$

$$E = 200 \text{ GPa} = 200\,000 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 250 \text{ MPa}$$

⑤ Criterio de CEDENCIA (FS = 1,75)

El enunciado dice "**falla por cedencia**", no "falla por tracción": la cedencia le aplica a **todos** los miembros, traccionados y comprimidos. Se chequean los dos peores, uno de cada signo.

$$\sigma_{adm} = \sigma_y / 1,75 = 250 / 1,75 = 142,86 \text{ MPa}$$

$$N_{adm} = \sigma_{adm} \cdot A = 142,86 \times 10\,200 = 1\,457\,143 \text{ N} = 1457,14 \text{ kN}$$

Máxima TRACCIÓN – CD y DE con 7,5P :
 $7,5 P \leq 1457,14 \text{ kN} \rightarrow P \leq 194,29 \text{ kN}$

Máxima COMPRESIÓN – HE con 12,5P :
 $12,5 P \leq 1457,14 \text{ kN} \rightarrow P \leq 116,57 \text{ kN} \leftarrow \text{manda en cedencia}$

Si solo chequeas la tracción también llegas a 68 kN, y no es casualidad. El enunciado manda topar σ_{cr} en σ_y , así que el comprimido tiene los dos límites con el *mismo* 250 MPa arriba: $\sigma_y A/3 = 850 \text{ kN}$ por pandeo contra $\sigma_y A/1,75 = 1457 \text{ kN}$ por cedencia. Como $3 > 1,75$, el pandeo siempre sale $1,75/3 = 0,583$ veces el otro $\rightarrow$ **en un miembro comprimido el pandeo se come a la cedencia** y chequearle cedencia es redundante. Ojo: eso vale *aquí*; si el FS de pandeo fuera menor que el de cedencia, se invertiría y saltarse ese chequeo sí sería un error.

⑥ Criterio de PANDEO (FS = 3)

$$\sigma_{cr} = \pi^2 E / (L/r)^2 \quad \text{con tope} \quad \sigma_{cr} \leq \sigma_y = 250 \text{ MPa}$$

BARRA	L (MM)	L/R _y	Σ_{CR} EULER	Σ_{CR} USADA	P _{CR} (KN)	P _{ADM} =P _{CR} /3	LÍMITE DE P
FG, GH	3000	46,15	926,6	250	2550	850	$7,5P \leq 850 \rightarrow 113,33$
CG	4000	61,54	521,2	250	2550	850	$3P \leq 850 \rightarrow 283,33$
AF	5000	76,92	333,6	250	2550	850	$8,75P \leq 850 \rightarrow 97,14$
HE	5000	76,92	333,6	250	2550	850	$12,5P \leq 850 \rightarrow 68,00$

Todas las σ_{cr} de Euler dan por encima de 250 MPa, así que en las cuatro se usa el tope $\sigma_{cr} = \sigma_y = 250 \text{ MPa}$ (como indica el enunciado):

$$P_{cr} = 250 \times 10\,200 = 2\,550\,000 \text{ N} = 2550 \text{ kN}$$

$$P_{adm} = 2550 / 3 = 850 \text{ kN} \quad (\text{igual para todas las comprimidas})$$

$$\text{Rige HE (12,5P):} \quad 12,5 P \leq 850 \text{ kN} \rightarrow P \leq 68 \text{ kN}$$

⑦ Carga máxima

Cedencia: $P \leq 116,57 \text{ kN}$

Pandeo: $P \leq 68,00 \text{ kN} \leftarrow \text{RIGE}$

RESPUESTA PROBLEMA 4

$P_{\text{máx}} = 68 \text{ kN}$ — controla el **pandeo del miembro HE** (compresión $12,5P$)

Comprobación: $12,5(68) = 850 \text{ kN} = P_{\text{adm}} \text{ pandeo } \checkmark$ y $850 \text{ kN} < 1457 \text{ kN}$ de cedencia $\checkmark$

Dos detalles que suman puntos:

1. Usar $r_y = 65 \text{ mm}$ (el menor), no r_x . La columna pandea alrededor del eje débil.
2. Explicar por qué el tope: con L/r entre 46 y 77, la fórmula de Euler daría tensiones de 333 a 927 MPa, muy por encima de la cedencia de 250 MPa. O sea, Euler no aplica en ese rango — el material cede antes de pandear elásticamente. Por eso el enunciado manda a topar σ_{cr} en σ_y .

Resumen de respuestas

#	PIDE	RESPUESTA	PTS
1	Reacciones viga ABC	$A_y = C_y = 12,5 \text{ kN } \uparrow \cdot B_y = 55 \text{ kN } \uparrow \cdot A_x = 0$	4
2	δ horizontal de D	$0,2493 \text{ m} = 24,93 \text{ cm} \rightarrow$ (flex. 0,1244 + axial 0,1249)	4
3	δ horizontal de A	$0,01720 \text{ m} = 1,72 \text{ cm} \rightarrow$ (axial 0,017143 + flex. 0,0000595)	6
4	Carga máxima P	$P_{\text{máx}} = 68 \text{ kN}$ (rige pandeo de HE)	6

Antes de escanear y enviar

- Hoja 1 arriba: **nombre, cédula, fecha, "4to Parcial — Mecánica de Sólidos II"**
- Redibuja cada figura **con la carga Q** y las reacciones en función de Q
- Deja escritas las **comprobaciones de estática** ($\Sigma F = 0, \Sigma M = 0$) — el profesor las revisa
- Encierra en cuadro cada resultado final, con **unidades y sentido** ($\rightarrow, \uparrow$)
- En el problema 4: **la tabla es obligatoria** (la pide explícitamente)

- Escanea legible y en orden · Asunto del correo: **4P MSII Scarbay** · antes de las 8:59 a.m.

Resultados verificados por análisis matricial de rigidez, discretización de cargas distribuidas e integración simbólica — los tres coinciden a 6 cifras.