

Tarea 4 — Teorema de Castigliano aplicado a la viga IPE 200 del balcón

La misma viga de la Tarea 1, resuelta ahora por el método del último tema. 6 hojas.

HOJA 1

UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO
Facultad de Ingeniería · Escuela de Ingeniería Civil

Aplicación del Teorema de Castigliano a una Viga Hiperestática Real

Caso de estudio: viga IPE 200 de un balcón residencial
empotrada en el muro de carga y apuntalada por una columna auxiliar
En el marco de la asignatura Mecánica de Sólidos II — UCAB

Ejercicio de aplicación a la vida real — Entrega del Cuarto Parcial

Prof. Ing. Miguel Ángel Rodríguez Carrasquilla

Scarbay, Misael — C.I. 28.027.958

21 de julio de 2026

1. Introducción y objetivo

En la **Tarea #1** se estudió una viga de acero IPE 200 que sostiene la losa de un balcón residencial: está empotrada en el muro de carga del edificio en el punto **A** y, en su extremo libre, apuntalada por una columna metálica auxiliar en el punto **B**. En aquella oportunidad se determinaron las reacciones R_A , M_A y R_B aplicando el **método de superposición**.

El objetivo de esta cuarta entrega es **volver sobre exactamente el mismo elemento real y resolverlo por un camino distinto: el segundo teorema de Castigliano**, que es el método estudiado en este último tema. La intención es doble: aplicar el método energético a un caso práctico y, sobre todo, **verificar** que dos métodos independientes conducen a los mismos valores. Si coinciden, el modelo y los cálculos quedan validados.

Por qué esta viga es un buen caso para Castigliano. Es hiperestática: tiene tres reacciones incógnitas y solo dos ecuaciones de equilibrio útiles. La estática por sí sola no la resuelve; hace falta una condición adicional de *deformación*. Castigliano provee esa condición de manera directa y sistemática.

2. Planteamiento del problema

2.1 Idealización del modelo (la misma de la Tarea #1)

- **Elemento:** viga de acero IPE 200 que soporta la losa de un balcón residencial.
- **Apoyo en A:** la viga está embebida en el muro de carga, que impide el desplazamiento vertical *y* el giro → se modela como **empotramiento**.
- **Apoyo en B:** la columna metálica auxiliar impide el descenso pero no restringe el giro → se modela como **apoyo simple**.
- **Carga:** w es la suma del peso propio de la losa, el acabado de piso y la sobrecarga de uso normada, ya distribuida sobre la viga.

2.2 Datos

Dato	Valor	Observación
Longitud L	3,00 m	volado del balcón
Carga distribuida w	4 kN/m	losa + acabado + sobrecarga
Inercia I (IPE 200)	$1,94 \times 10^{-5} \text{ m}^4$	tabla de perfiles
Módulo de elasticidad E	200 GPa	acero estructural
Rigidez a flexión EI	3880 kN·m ²	$(200 \times 10^6 \text{ kPa})(1,94 \times 10^{-5} \text{ m}^4)$

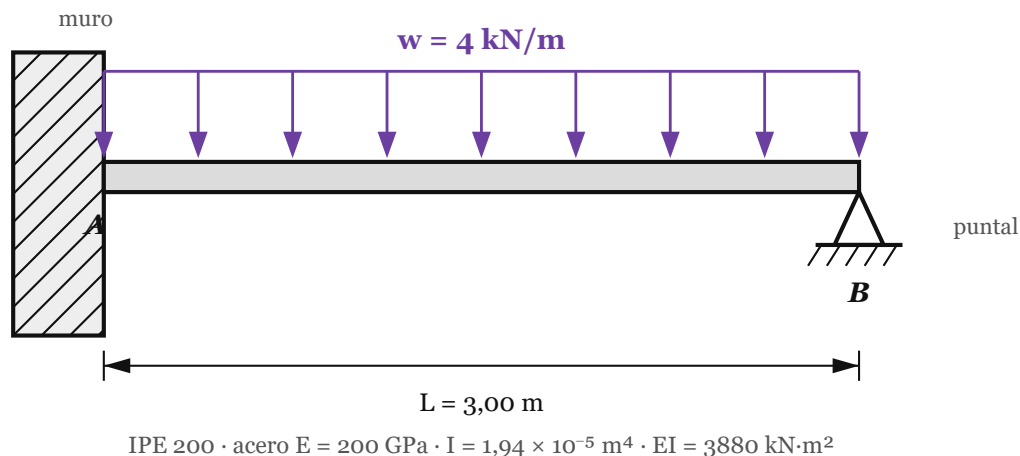


Figura 1 — Modelo analítico: viga empotrada en A, apoyada en B (voladizo apuntalado) con carga uniformemente distribuida.

2.3 Enunciado

Para la viga descrita ($L = 3,00 \text{ m}$, $w = 4 \text{ kN/m}$, $EI = 3880 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$) se pide, **aplicando el segundo teorema de Castigliano**:

- a) Las reacciones en los apoyos R_A , M_A y R_B .
- b) La flecha de la viga y la verificación por servicio.
- c) Comparar los resultados con los obtenidos en la Tarea #1.

3. Grado de hiperestaticidad y elección de la redundante

Reacciones incógnitas: R_A (vertical), M_A (momento), R_B (vertical)
 = 3

Ecuaciones de estática útiles ($\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M = 0$): = 2

G.H. = $3 - 2 = 1 \rightarrow$ hiperestática de PRIMER grado

Se elige como redundante la reacción del puntal: R_B

Al liberar el puntal, la viga se convierte en un **voladizo empotrado en A**, que es isostático y de manejo muy sencillo. La reacción R_B deja de ser un vínculo y pasa a ser una **fuerza aplicada desconocida** sobre esa estructura primaria.

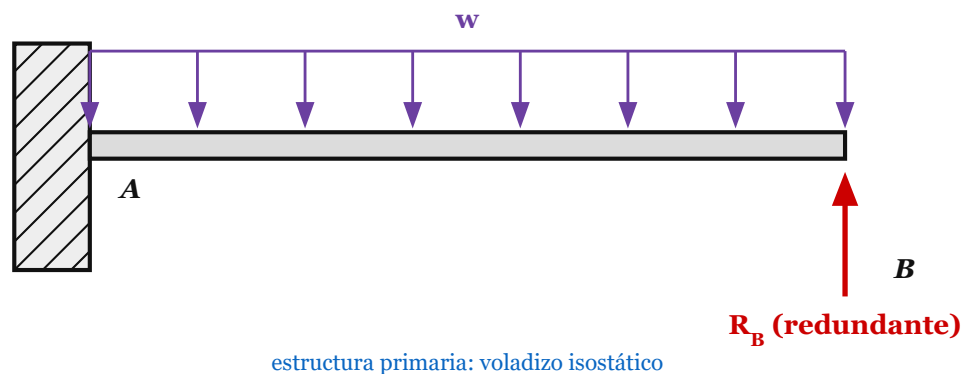


Figura 2 — Estructura primaria: se retira el puntal y su reacción R_B se trata como una carga aplicada desconocida.

4. Resolución por el segundo teorema de Castigliano

4.1 Condición de compatibilidad

El segundo teorema de Castigliano establece que la derivada parcial de la energía de deformación respecto de una fuerza da el **desplazamiento** de su punto de aplicación, en su misma dirección. Ahora bien: el puntal en B es un apoyo rígido, de modo que **el punto B no baja**. Ésa es exactamente la ecuación que faltaba:

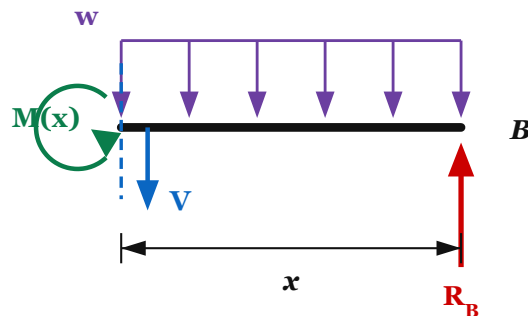
$$\delta_B = \partial U / \partial R_B = 0 \quad \text{con} \quad U = \int M^2 / (2EI) \, dx$$

$$\rightarrow (1/EI) \int_0^L M(x) \cdot (\partial M / \partial R_B) \, dx = 0$$

Se considera únicamente la energía de **flexión**. En vigas de este tipo (esbeltas, $L/h = 3,00/0,20 = 15$) la energía por cortante es del orden del 1 % y se desprecia, como es práctica corriente.

4.2 Momento flector en función de la redundante

Conviene tomar el **origen en B** y medir x hacia A: así el trozo aislado contiene solo R_B y la carga distribuida, sin que aparezcan las reacciones del empotramiento. La expresión de $M(x)$ es entonces válida en toda la luz, con una sola integral.



se conserva el trozo derecho: contiene solo R_B y la carga w

Figura 3 — Cuerpo libre del trozo comprendido entre B y una sección genérica situada a una distancia x del puntal.

Momento de las fuerzas del trozo respecto de la sección de corte:

$$R_B \cdot \text{brazo } x \quad \rightarrow \quad + R_B \cdot x$$

$$\text{resultante de } w \text{ } (= w \cdot x, \text{ aplicada en } x/2) \quad \rightarrow \quad - w \cdot x \cdot (x/2)$$

$$M(x) = R_B \cdot x - w \cdot x^2/2 \quad (0 \leq x \leq L)$$

$$\partial M / \partial R_B = x$$

4.3 Cálculo de la redundante

$$\int_0^L (R_B \cdot x - w \cdot x^2/2) \cdot x \, dx = 0$$

$$\int_0^L (R_B \cdot x^2 - w \cdot x^3/2) \, dx = 0$$

$$R_B \cdot L^3/3 - w \cdot L^4/8 = 0$$

$$R_B \cdot L^3/3 = w \cdot L^4/8$$

$$\rightarrow R_B = 3 \cdot w \cdot L/8$$

Nótese que EI se cancela por completo: la redundante **no depende del material ni del perfil**, solo de la geometría y de la carga. Esto es característico de las estructuras

4.4 Las otras dos reacciones, por equilibrio

Conocida la redundante, la viga ya es estáticamente determinada y las reacciones del empotramiento salen de las dos ecuaciones de la estática:

$$\Sigma F_y = 0 : R_A + R_B - w \cdot L = 0$$

$$R_A = w \cdot L - 3wL/8 \quad \rightarrow \quad R_A = 5 \cdot w \cdot L/8$$

$$\Sigma M_A = 0 : M_A + R_B \cdot L - (w \cdot L) \cdot (L/2) = 0$$

$$M_A = w \cdot L^2/2 - (3wL/8) \cdot L = wL^2/2 - 3wL^2/8$$

$$\rightarrow M_A = w \cdot L^2/8 \quad (\text{tracciona la fibra superior})$$

4.5 Flecha en el centro de la luz: carga ficticia Q

Castigliano da el desplazamiento del punto donde hay una fuerza aplicada. Como en el centro de la luz no hay ninguna, se coloca allí una **carga ficticia Q**, se deriva respecto de ella y al final se hace $Q = 0$. La carga Q parte la viga en dos tramos:

$$\text{Tramo B-Q } (0 \leq x \leq L/2): M_1 = R_B \cdot x - w \cdot x^2/2 \quad \partial M_1 / \partial Q = 0$$

$$\text{Tramo Q-A } (L/2 \leq x \leq L): M_2 = R_B \cdot x - w \cdot x^2/2 - Q \cdot (x - L/2) \quad \partial M_2 / \partial Q = -(x - L/2)$$

El primer tramo no aporta (su derivada es nula). Con $Q = 0$ y $R_B = 3wL/8$:

$$\delta_C = (1/EI) \int_{L/2}^L (3wL \cdot x/8 - w \cdot x^2/2) \cdot [-(x - L/2)] dx$$

$$\text{integrando: } = (1/EI) [15wL^4/128 - 35wL^4/192 + 9wL^4/128]$$

$$\rightarrow \delta_c = w \cdot L^4 / (192 \cdot EI) \quad (\text{hacia abajo})$$

Detalle fino que conviene justificar. Al derivar respecto de Q se dejó R_B fijo, pese a que en rigor la redundante depende de Q. Es legítimo: por la regla de la cadena $dU/dQ = \partial U/\partial Q + (\partial U/\partial R_B) \cdot (dR_B/dQ)$, y el segundo término se anula porque $\partial U/\partial R_B = 0$ es precisamente la condición de compatibilidad, que se cumple para cualquier valor de Q (teorema de Menabrea).

La flecha **máxima** no ocurre exactamente en el centro, porque la viga no es simétrica. Integrando dos veces la ecuación de la elástica $EI \cdot y'' = M(x)$, con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ por el empotramiento, resulta:

$$EI \cdot y(x) = -M_A \cdot x^2/2 + R_A \cdot x^3/6 - w \cdot x^4/24$$

$$\text{Comprobación: } y(L) = 0 \quad \checkmark \quad (\text{el puntal no permite descenso en B})$$

$$y'(x) = 0 \rightarrow 8x^2 - 15L \cdot x + 6L^2 = 0 \rightarrow x = L(15 - \sqrt{33})/16 = 0,578 L$$

$$\rightarrow \delta_{\max} = 0,005416 \cdot w \cdot L^4 / EI \quad \text{en } x = 0,578 L$$

5. Sustitución numérica

$$R_B = 3wL/8 = 3(4)(3)/8 = 36/8 = 4,50 \text{ kN}$$

$$R_A = 5wL/8 = 5(4)(3)/8 = 60/8 = 7,50 \text{ kN}$$

$$M_A = wL^2/8 = (4)(3)^2/8 = 36/8 = 4,50 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\text{Comprobación del equilibrio: } R_A + R_B = 7,50 + 4,50 = 12,00 \text{ kN} = w \cdot L = (4)(3) \quad \checkmark$$

$$\delta_C = wL^4 / (192 \cdot EI) = (4)(3)^4 / [192(3880)] = 324 / 744\,960 = 0,000435 \text{ m} = 0,435 \text{ mm}$$

$$\delta_{\text{máx}} = 0,005416(4)(3)^4 / 3880 = 0,000452 \text{ m} = 0,452 \text{ mm} \text{ en } x = 1,735 \text{ m}$$

6. Diagramas de corte y momento

Con origen en A: $V(x) = R_A - w \cdot x = 7,5 - 4x$

$$M(x) = -M_A + R_A \cdot x - w \cdot x^2 / 2 = -4,5 + 7,5x - 2x^2$$

$V = 0$ en $x = 7,5/4 = 1,875 \text{ m} \rightarrow M_{\text{máx}}^{(+)} = 9wL^2/128 = 2,53 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$M = 0$ en $x = L/4 = 0,75 \text{ m}$ (punto de inflexión)

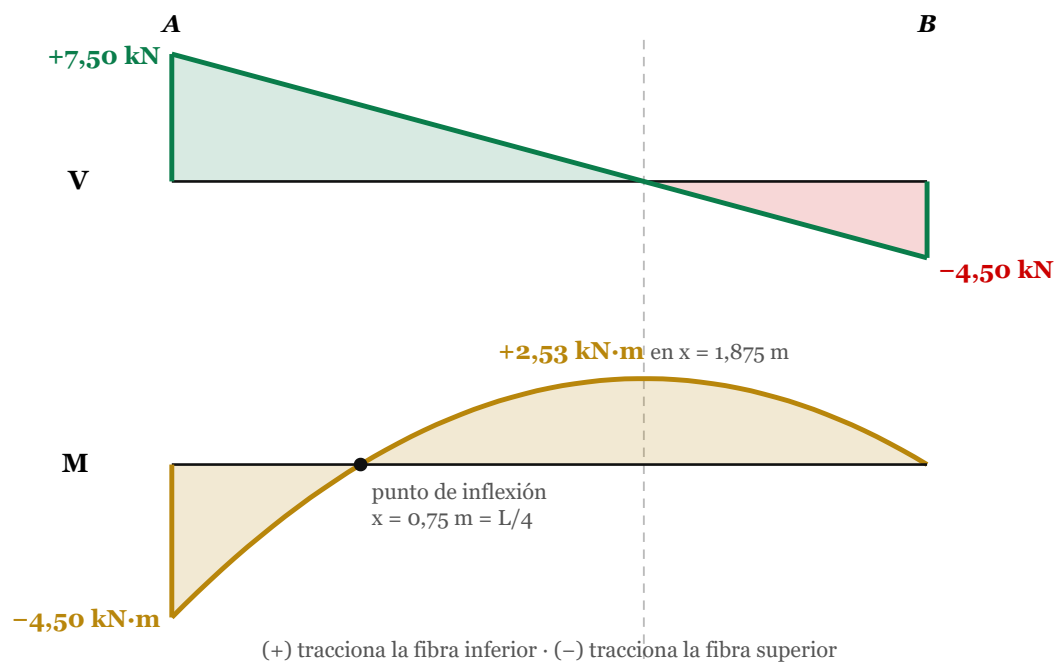


Figura 4 — Diagramas de fuerza cortante y momento flector. La línea de trazos marca que el momento máximo positivo ocurre donde el corte se anula.

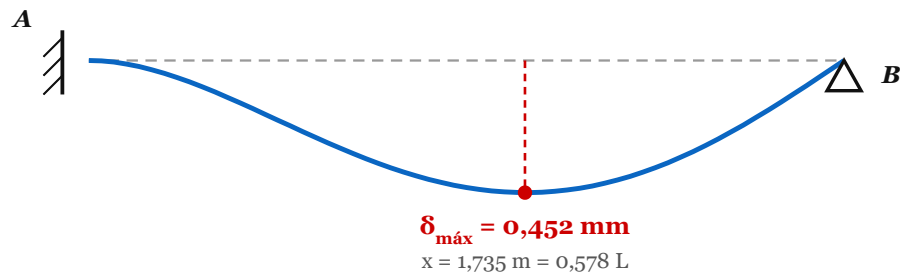


Figura 5 — Elástica de la viga (escala vertical muy amplificada). El giro es nulo en A y el descenso es nulo en B.

7. Comparación con la Tarea #1

En la Tarea #1 la misma viga se resolvió por **superposición**: se liberaba el puntal y se imponía que la flecha del voladizo bajo w se cancelara con la que produce R_B :

$$w \cdot L^4 / (8 \cdot EI) = R_B \cdot L^3 / (3 \cdot EI) \quad \rightarrow \quad R_B = 3 \cdot w \cdot L / 8$$

Magnitud	Tarea 1 (superposición)	Tarea 4 (Castigliano)	Diferencia
Reacción del puntal $R_B = 3wL/8$	4,50 kN	4,50 kN	0
Reacción del empotramiento $R_A = 5wL/8$	7,50 kN	7,50 kN	0
Momento de empotramiento $M_A = wL^2/8$	4,50 kN·m	4,50 kN·m	0
Flecha en el centro $\delta_C = wL^4/192EI$	0,435 mm	0,435 mm	0

Los dos métodos coinciden exactamente:

$$R_A = 7,50 \text{ kN} \cdot M_A = 4,50 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot R_B = 4,50 \text{ kN}$$

8. Verificaciones de ingeniería

8.1 Resistencia

La sección crítica es el empotramiento, con $|M| = 4,50 \text{ kN}\cdot\text{m}$. Para el IPE 200,

$$c = h/2 = 0,10 \text{ m:}$$

$$\sigma = M \cdot c / I = (4,50)(0,10) / (1,94 \times 10^{-5}) = 23\,196 \text{ kPa} = 23,2 \text{ MPa}$$

Acero estructural, $f_y = 250 \text{ MPa} \rightarrow F.S. = 250/23,2 = 10,8 \quad \checkmark$
holgado

8.2 Servicio (flecha admisible)

$$\delta_{\text{adm}} = L/360 = 3000/360 = 8,33 \text{ mm}$$

$$\delta_{\text{máx}} = 0,452 \text{ mm} = L/6633 \ll 8,33 \text{ mm} \quad \checkmark \text{ CUMPLE con amplio margen}$$

8.3 ¿Qué aporta realmente el puntal?

Vale la pena cuantificar el papel de la columna auxiliar comparando con la misma viga **sin** el apoyo en B, es decir, como voladizo puro:

	Sin puntal (voladizo)	Con puntal (caso real)	Mejora
Momento en el empotramiento	$wL^2/2 = 18,0$ kN·m	$wL^2/8 = 4,50$ kN·m	4 veces menor
Tensión máxima	92,8 MPa	23,2 MPa	4 veces menor
Flecha máxima	$wL^4/8EI = 10,44$ mm	0,452 mm	23 veces menor
¿Cumple $L/360 = 8,33 \text{ mm}$?	NO ($10,44 > 8,33$)	SÍ	—

Resultado con significado práctico: **sin la columna auxiliar el balcón no cumpliría el límite de flecha**, aun cuando resistiría de sobra. Es un caso típico donde el diseño lo gobierna el **servicio** y no la resistencia. Además, el cálculo entrega el dato que necesita quien diseñe esa columna: debe soportar **4,50 kN**.

9. Conclusiones

1. Se resolvió por segunda vez la misma viga real del balcón, ahora con el **segundo teorema de Castigliano**, y las tres reacciones coinciden exactamente con las obtenidas por superposición en la Tarea #1: $R_A = 7,50 \text{ kN}$, $M_A = 4,50 \text{ kN}\cdot\text{m}$ y $R_B = 4,50 \text{ kN}$.
2. La condición de compatibilidad se planteó sobre la **reacción del puntal**: como B es un apoyo rígido, $\delta_B = \partial U / \partial R_B = 0$. Tomando el origen en B, el momento flector queda con una sola expresión válida en toda la luz y la redundante sale de una única integral, sin que intervengan las reacciones del empotramiento.
3. La ventaja práctica del método energético quedó a la vista en el apartado 4.5: la **carga ficticia Q** permite obtener el desplazamiento de cualquier punto sin necesidad de plantear e integrar la ecuación de la elástica. Colocándola en otra sección se obtendría la flecha de esa sección.
4. Las verificaciones muestran una viga **muy holgada en resistencia** (F.S. = 10,8) y **holgada en servicio** ($\delta = L/6633$ frente al límite $L/360$), gracias a la presencia del puntal: sin él la flecha se multiplicaría por 23 y el elemento no cumpliría.
5. El punto de inflexión en $x = L/4 = 0,75 \text{ m}$ indica dónde el momento cambia de signo: entre A y esa sección tracciona la fibra superior, y del otro lado la inferior. Es un dato útil en obra para definir el arriostramiento del ala comprimida y el detalle de la conexión.